

Kategorientheorie

Wintersemester 2011/12

Universität Münster

Dr. Thomas Timmermann
timmermt@uni-muenster.de

10. April 2012

Ich bedanke mich bei Jan Ruske und Steffen Tillmann für zahlreiche Hinweise auf Unklarheiten und Fehler.

Inhaltsverzeichnis

I	Grundlagen	1
1	Kategorien	1
2	Funktoren	3
3	Natürliche Transformationen	5
II	Universelle Eigenschaften	9
4	Einführung	9
5	Darstellbare Funktoren und die Yoneda-Einbettung	12
5.1	Darstellbare Funktoren	12
5.2	Das Yoneda-Lemma	14
5.3	Die Yoneda-Einbettung	16
5.4	Natürlichkeit der Yoneda-Abbildung	17
6	Adjungierte Funktoren	18
6.1	Definition, Beispiele und Zusammenhang zu Darstellbarkeit	18
6.2	Eins und Koeins einer Adjunktion	21
7	Limites und Kolimites	25
7.1	Definition und erste Beispiele	25
7.2	(Ko-)Limites als Darstellungen von Funktoren	31
7.3	Stetigkeit und Kostetigkeit von Funktoren	33
7.4	(Ko-)Limites in Kategorien von Funktoren	37
III	Kategorien mit Zusatzstruktur	40
8	Monoidale Kategorien	40
8.1	Grundbegriffe	40
8.2	Monoide	42
8.3	Monaden	44
8.4	Das universelle Monoid in der Kategorie Δ	47
8.5	Simpliziale Homologietheorien	48

Teil I

Grundlagen

1 Kategorien

Man studiert einer Klasse von Objekten stets mit den zugehörigen Abbildungen.

Definition 1.1. Eine Kategorie C besteht aus

- einer Klasse $\text{Ob}(C)$ von sogenannten Objekten, (wir schreiben auch $A \in C$ im Fall $A \in \text{Ob}(C)$)
- einer Menge $\text{Hom}(A, B)$ von sogenannten Morphismen für je zwei $A, B \in C$, (wir schreiben auch $A \xrightarrow{f} B$ oder $f: A \rightarrow B$ im Fall $f \in \text{Hom}(A, B)$)
- einer Abbildung $\text{Hom}(B, C) \times \text{Hom}(A, B) \rightarrow \text{Hom}(A, C)$, $(f, g) \mapsto f \circ g = fg$ für je drei $A, B, C \in C$,
- einem Morphismus $1_A \in \text{Hom}(A, A)$ für jedes $A \in C$,

die folgende Bedingungen erfüllen:

- (Assoziativität) für alle Tripel von Morphismen $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} D$ in C gilt $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$;
- (Unitalität) für jeden Morphismus $A \xrightarrow{f} B$ in C gilt $1_B \circ f = f = f \circ 1_A$.

Bemerkung 1.2. • Wir unterscheiden zwischen (kleinen) Mengen und (großen) Klassen; kümmern uns aber so wenig wie möglich um mengentheoretische Grundlagen.

- Wir nennen eine Kategorie *klein*, falls ihre Objekte eine Menge bilden.
- Manchmal lässt man zu, dass die Morphismen zwischen zwei Objekten eine Klasse statt einer Menge bilden, und nennt Kategorien im obigen Sinn *lokal-klein*.
- Wir nehmen $\text{Hom}(A, B) \cap \text{Hom}(C, D) = \emptyset$ im Fall $(A, B) \neq (C, D)$ an (o.B.d.A.).

Wir sprechen von *kommutativen Diagrammen* in Kategorien, z.B.:

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C \\ \downarrow k & & & & \downarrow h \\ E & \xrightarrow{l} & & & D \end{array} \quad \text{kommutiert} \quad \Leftrightarrow \quad lk = hg.$$

Die Welt ist *übersät* mit Kategorien mathematischer Strukturen:

Beispiele 1.3.	Kategorie	Objekte	Morphismen
	(Set)	Mengen	Abbildungen
	(Set) _*	Mengen mit einem fixierten Element	Abbildungen, die das fixierte Element bewahren
	(Ring)	Ringe	Ringhomomorphismen
	(Top)	top. Räume	stetige Abbildungen
	(hTop)	top. Räume	Homotopie-Klassen stetiger Abbildungen

Hierbei ist die Verknüpfung von Morphismen jeweils wie gewöhnlich definiert.

Definition 1.4. Ein Morphismus $A \xrightarrow{f} B$ in einer Kategorie heißt Isomorphismus, falls es ein $B \xrightarrow{g} A$ gibt mit $f \circ g = 1_B$ und $g \circ f = 1_A$. In dem Fall ist g eindeutig bestimmt und wird mit f^{-1} bezeichnet, und A und B heißen dann isomorph, geschrieben $A \cong B$.

Spezielle Kategorien entsprechen bekannten mathematischen Strukturen:

Beispiele 1.5. Eine kleine Kategorie ...

- i) mit genau einem Objekt entspricht einem Monoid (die Morphismen bezüglich der Verknüpfung);
- ii) mit genau einem Objekt, in der jeder Morphismus ein Isomorphismus ist, entspricht einer Gruppe;
- iii) mit der Eigenschaft

$$|\mathrm{Hom}(A, B)| \leq 1 \quad \text{und} \quad A \cong B \Rightarrow A = B \quad \text{für alle Objekte } A, B$$

entspricht einer Halbordnung (die Objekte bezüglich $A \leq B : \Leftrightarrow |\mathrm{Hom}(A, B)| = 1$).

Neue Kategorien kann man auf unzählige Arten und Weisen konstruieren:

Beispiele 1.6. i) Zu jeder Kategorie $\mathcal{C}$ gibt es eine *duale Kategorie* $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ mit

- denselben Objekten: $\mathrm{Ob}(\mathcal{C}^{\mathrm{op}}) = \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$,
- den umgekehrten Morphismen: $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}}(A, B) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B, A)$ für alle A, B ,
- der umgedrehten Verknüpfung von Morphismen.

Jede Definition/Aussage zu Kategorien impliziert eine duale Definition/Aussage.

ii) Zu je zwei Kategorien $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ gibt es eine *Produktkategorie* $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$ mit

- $\text{Ob}(\mathcal{C} \times \mathcal{D}) = \text{Ob}(\mathcal{C}) \times \text{Ob}(\mathcal{D})$,
- $\text{Hom}((A, B), (E, F)) = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, E) \times \text{Hom}_{\mathcal{D}}(B, F)$,
- der komponentenweisen Verknüpfung von Morphismen.

iii) Zu jeder Kategorie $\mathcal{C}$ und jedem $X \in \mathcal{C}$ gibt es eine Kategorie $\mathcal{C}/_X$:

- Objekte sind alle Morphismen $A \xrightarrow{f} X$;
- Morphismen zwischen $A \xrightarrow{f} X$ und $B \xrightarrow{g} X$ sind alle kommutativen Dreiecke

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{h} & B \\ & \searrow f & \swarrow g \\ & X, & \end{array}$$

mit der offensichtlichen Verknüpfung.

Dual dazu gibt es eine Kategorie $X/_\mathcal{C}$ aller Morphismen $X \xrightarrow{f} A$.

2 Funktoren

- Betrachtet man gewissen Objekten zugeordnete
 - Darstellungen,
 - Invarianten (Homologie-Theorie, K-Theorie, ...),
 - Konstruktionen ((Tensor-)Produkte, Quotienten, ...),

so induzieren Morphismen der Objekte meist Morphismen der zugeordneten Darstellungen/Invarianten/...

- Kleine Kategorien bilden selbst eine Kategorie! Was sind die Morphismen?

Definition 2.1. Seien $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ Kategorien. Ein (kovarianter) Funktor $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ besteht aus Zuordnungen

i) $\text{Ob}(\mathcal{C}) \rightarrow \text{Ob}(\mathcal{D})$, $A \mapsto F(A) = FA$, und

ii) $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}}(FA, FB)$, $f \mapsto F(f) = Ff$, für alle $A, B \in \mathcal{C}$,

die folgende Bedingungen erfüllen:

- für alle $A \in \mathcal{C}$ gilt $F1_A = 1_{FA}$,

- für alle Morphismen $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ in $\mathcal{C}$ gilt $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$.

Dabei heißt F *treu* / *voll* / *volltreu*, falls die Zuordnungen in ii) jeweils alle *injektiv* / *surjektiv* / *bijektiv* sind.

Ein (treuer/...) kontravarianter Funktor $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ ist ein (treuer/...) kovarianter Funktor $\mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{D}$ (bzw. äquivalent $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}^{\text{op}}$).

Konstruktion 2.2. Funktoren kann man in offensichtlicher Weise verknüpfen und für jede Kategorie gibt es einen Identitäts-Funktor. Daher bilden alle kleinen Kategorien mit ihren Funktoren eine Kategorie (Cat).

Beispiele 2.3. i) Eine *Unterkategorie* einer Kategorie $\mathcal{C}$ ist eine Kategorie $\mathcal{B}$ mit

$$\text{Ob}(\mathcal{B}) \subseteq \text{Ob}(\mathcal{C}), \quad \text{Hom}_{\mathcal{B}}(A, B) \subseteq \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B) \text{ für alle } A, B \in \text{Ob}(\mathcal{B}).$$

Der Inklusions-Funktor $\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$ ist *treu*. Falls er *voll* ist, heißt $\mathcal{B}$ *volle Unterkategorie* von $\mathcal{C}$ und ist durch die Objekte bereits festgelegt.

ii) Es gibt unzählige “Vergiss-Funktoren”, z.B.

$$\begin{aligned} (\text{Top}) &\xrightarrow[\text{die Topologie}]{\text{Vergiss}} (\text{Set}), \\ (\text{Ring}) &\xrightarrow[\text{die Multiplikation}]{\text{Vergiss}} (\text{Ab}) = \text{Kategorie der abelschen Gruppen}, \\ (\text{Ab}) &\xrightarrow[\text{die Kommutativität}]{\text{Vergiss}} (\text{Group}) = \text{Kategorie der Gruppen}. \end{aligned}$$

iii) Die (Ko)Homologiegruppen eines Raumes sind seine Bilder unter Funktoren

$$H_n, H^n: (\text{Top}) \rightarrow (\text{Ab}) \quad (n \in \mathbb{N}).$$

iv) Die offenen Teilmengen eines Raumes $X \in (\text{Top})$ bilden bezüglich der Inklusionen eine Kategorie $O(X)$. Ein Funktor $O(X)^{\text{op}} \rightarrow (\text{Set})$ ist eine *Prägarbe* (von Mengen) auf X . Beispiel: $F(U) = C(U)$ und $F(U \hookrightarrow V): C(V) \xrightarrow{f \mapsto f|_U} C(U)$.

v) Bezeichne $(\text{Vect}_{\mathbb{k}})$ die Kategorie der Vektorräume über einem Körper $\mathbb{k}$.

- Dualisieren von Vektorräumen ist ein kontravarianter Funktor

$$(\text{Vect}_{\mathbb{k}}) \rightarrow (\text{Vect}_{\mathbb{k}}), \quad \left\{ \begin{array}{ll} V & \mapsto V' := \text{Hom}(V, \mathbb{k}), \\ (V \xrightarrow{\phi} W) & \mapsto (W' \xrightarrow[f \mapsto f \circ \phi]{\phi'} V'). \end{array} \right.$$

- Tensorprodukt bilden ist ein Funktor $(\text{Vect}_{\mathbb{k}}) \times (\text{Vect}_{\mathbb{k}}) \rightarrow (\text{Vect}_{\mathbb{k}})$.

vi) Bezeichne (Mfg) die Kategorie aller glatten Mannigfaltigkeiten und glatten Abbildungen. Dann gibt es Funktoren

$$\begin{aligned} C^\infty - : (\text{Mfg})^{\text{op}} &\rightarrow (\text{Vect}_{\mathbb{R}}), & \begin{cases} M & \mapsto C^\infty(M), \\ (M \xrightarrow{\phi} N) & \mapsto C^\infty(N) \xrightarrow[f \mapsto f \circ \phi]{\phi^*} C^\infty(M), \end{cases} \\ T - : (\text{Mfg}) &\rightarrow (\text{Mfg}), & \begin{cases} M & \mapsto TM = \bigsqcup_{p \in M} T_p M \subseteq C^\infty(M)', \\ (M \xrightarrow{\phi} N) & \mapsto TM \xrightarrow{\phi^*|_{TM}} TN, \end{cases} \end{aligned}$$

wobei

$$T_p M = \{X \in C^\infty(M)' : X(fg) = X(f)g(p) + f(p)X(g) \text{ für alle } f, g \in C^\infty(M)\}.$$

Die Relation $T(\phi \circ \psi) = T\phi \circ T\psi$ entspricht genau der Kettenregel!

3 Natürliche Transformationen

- Was bedeutet “natürlicher Isomorphismus”? (Z.B. bei $(X \times Y) \times Z \cong X \times (Y \times Z)$.)
- Wann sind zwei Kategorien äquivalent? (Isomorphie in (Cat) ist zu strikt.)
- Was sind Morphismen zwischen Funktoren?

Seien $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ Kategorien.

Definition 3.1. Seien $\mathcal{C} \xrightleftharpoons[G]{F} \mathcal{D}$ Funktoren. Eine natürliche Transformation $\alpha: F \rightarrow G$

bzw. $\mathcal{C} \begin{matrix} \xrightarrow{F} \\ \Downarrow \alpha \\ \xrightarrow{G} \end{matrix} \mathcal{D}$ ist eine Familie $(F_C \xrightarrow{\alpha_C} G_C)_{C \in \mathcal{C}}$ von Morphismen in $\mathcal{D}$ derart, dass

$$\begin{array}{ccc} FC & \xrightarrow{Ff} & FC' \\ \alpha_C \downarrow & & \downarrow \alpha_{C'} \\ GC & \xrightarrow{Gf} & GC' \end{array}$$

für jeden Morphismus $C \xrightarrow{f} C'$ in $\mathcal{C}$ kommutiert.

Ist α_C ein Isomorphismus für jedes $C \in \mathcal{C}$, so heißt α natürlicher Isomorphismus.

Beispiele 3.2. i) Es gibt eine natürliche Transformation

$$(\text{Vect}_{\mathbb{K}}) \begin{array}{c} \xrightarrow{1} \\ \Downarrow \mathfrak{t} \\ \xrightarrow{(-)''} \end{array} (\text{Vect}_{\mathbb{K}}), \quad \mathfrak{t}_V: V \rightarrow V'' = \text{Hom}(V', \mathbb{K}), \quad v \mapsto (\phi \mapsto \phi(v)).$$

Ersetzt man $(\text{Vect}_{\mathbb{K}})$ durch die Kategorie $(\text{fdVect}_{\mathbb{K}})$ der endlich-dimensionalen Vektorräume, so wird $\mathfrak{t}$ ein natürlicher Isomorphismus.

ii) Es gibt eine natürliche Transformation

$$\begin{array}{ccc} (\text{Top}_*) & \xrightarrow{\pi_1} & (\text{Group}) \\ U \downarrow & \swarrow & \downarrow \text{ab} \\ (\text{Top}) & \xrightarrow{H_1} & (\text{Ab}), \end{array}$$

wobei

- (Top_*) die Kategorie der top. Räume mit fixiertem Basispunkt ist,
- π_1 bzw. H_1 die erste Homotopie- bzw. Homologie-Gruppe von X ist,
- $\text{ab}(G) = G/[G, G]$ die Abelsierung der Gruppe G ist.

Konstruktion 3.3. Man prüft leicht folgende Aussagen:

- Natürliche Transformationen kann man verknüpfen:

$$\begin{array}{c} F \\ \curvearrowright \\ C \xrightarrow{G} \mathcal{D} \\ \curvearrowleft \\ H \end{array} \quad \text{liefert} \quad \begin{array}{c} F \\ \curvearrowright \\ C \xrightarrow{\beta \circ \alpha} \mathcal{D} \\ \curvearrowleft \\ H \end{array}, \quad \text{wobei } (\beta \circ \alpha)_C = \beta_C \circ \alpha_C.$$

- Für jeden Funktor F ist $1_F := (1_{FC})_{C \in \mathcal{C}}: F \rightarrow F$ eine natürliche Transformation.
- Die Funktoren bilden bezüglich der natürlichen Transformationen eine Kategorie $[\mathcal{C}, \mathcal{D}]$. Insbesondere ist dadurch Isomorphie von Funktoren erklärt.
- Eine natürliche Transformation ist genau dann ein natürlicher Isomorphismus, wenn sie ein Isomorphismus in $[\mathcal{C}, \mathcal{D}]$ ist.

Beispiele 3.4. i) Sei X ein topologischer Raum und $O(X)$ die Halbordnung der offenen Teilmengen als Kategorie (Beispiel 2.3 iv)). Dann ist $[O(X)^{\text{op}}, (\text{Set})]$ die Kategorie der Prägarben auf X .

- ii) Sei G eine Gruppe, aufgefasst als Kategorie (Beispiel 1.5 ii)). Dann ist $[G, (\text{Vect}_{\mathbb{K}})]$ die Kategorie aller Darstellungen von G ; siehe Übung.

Wann sind zwei Kategorien im “wesentlichen gleich”?

Definition 3.5. Zwei Kategorien $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ heißen

- isomorph, falls Funktoren $\mathcal{C} \xrightleftharpoons[G]{F} \mathcal{D}$ existieren mit $GF = 1_{\mathcal{C}}$ und $FG = 1_{\mathcal{D}}$; wir schreiben dann $\mathcal{C} \cong \mathcal{D}$ und $G = F^{-1}$;
- äquivalent, falls Funktoren $\mathcal{C} \xrightleftharpoons[G]{F} \mathcal{D}$ und natürliche Isomorphismen $\eta: 1_{\mathcal{C}} \rightarrow GF$, $\epsilon: FG \rightarrow 1_{\mathcal{D}}$ existieren; wir schreiben dann $\mathcal{C} \simeq \mathcal{D}$ und nennen F (bzw. (F, G, η, ϵ)) eine Äquivalenz.

Satz 3.6. Ein Funktor $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ ist eine Äquivalenz genau dann, wenn er

- volltreu (auf Morphismen) und
- im wesentlichen surjektiv auf Objekten ist, d.h. $\forall D \in \mathcal{D} \exists C \in \mathcal{C} : F(C) \cong D$.

Beweis. “ $\Rightarrow$ ” ÜA.

“ $\Leftarrow$ ” Definition von $G: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ und $\epsilon: FG \rightarrow 1_{\mathcal{D}}$: Wähle

- für jedes Objekt $D \in \mathcal{D}$ ein $GD \in \mathcal{C}$ mit einem Isomorphismus $\epsilon_D: F(GD) \rightarrow D$ (nutze ii) oben und ein Auswahlaxiom für Familien);
- für jeden Morphismus $D \xrightarrow{g} D'$ in $\mathcal{D}$ das Bild $GD \xrightarrow{Gg} GD'$ so, dass

$$\begin{array}{ccc} D & \xrightarrow{g} & D' \\ \epsilon_D \uparrow & & \uparrow \epsilon_{D'} \\ F(GD) & \xrightarrow{F(Gg)} & F(GD') \end{array}$$

kommutiert (nutze, dass F voll ist).

Definition von η : Für jedes $C \in \mathcal{C}$

- ist $\epsilon_{FC}: FGFC \rightarrow FC$ ein Isomorphismus
- setzen wir $\eta_C := F^{-1}\epsilon_{FC}^{-1}$ (nutze, dass F volltreu).

Für jeden Morphismus $C \xrightarrow{f} C'$ kommutiert

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{f} & C' \\ \eta_C \downarrow & & \downarrow \eta_{C'} \\ GFC & \xrightarrow{GFf} & GFC', \end{array}$$

weil das Bild unter F kommutiert und F treu ist. □

Beispiel 3.7. i) Sei $\mathbb{k}$ ein Körper und $(\text{Mat}_{\mathbb{k}})$ die Kategorie mit

- $\text{Ob}((\text{Mat}_{\mathbb{k}})) = \mathbb{N}$,
- $\text{Hom}(n, m) =$ alle $m \times n$ -Matrizen über $\mathbb{k}$,
- Verknüpfung = Matrixmultiplikation.

Dann existiert eine Äquivalenz

$$F : (\text{Mat}_{\mathbb{k}}) \rightarrow (\text{fdVect}_{\mathbb{k}}), \quad \begin{cases} n \mapsto \mathbb{k}^n, \\ A \mapsto (x \mapsto Ax). \end{cases}$$

ii) Sei (Monoid) die Kategorie aller Monoide und $\mathfrak{M} \subset (\text{Cat})$ die volle Unterkategorie aller Kategorien $\mathcal{C}$ mit genau einem Objekt $X_{\mathcal{C}} \in \mathcal{C}$. Dann existiert eine Äquivalenz

$$F : \mathfrak{M} \rightarrow (\text{Monoid}), \quad \begin{cases} \mathcal{C} \mapsto \text{Hom}(X_{\mathcal{C}}, X_{\mathcal{C}}), \\ (F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}) \mapsto F|_{\text{Hom}(X_{\mathcal{C}}, X_{\mathcal{C}})}. \end{cases}$$

iii) Es gibt Äquivalenzen

$$\begin{aligned} (\text{affine Schemata}) &\simeq (\text{unitale, kommutative Ringe})^{\text{op}}, \\ (\text{kompakte topologische Räume}) &\simeq (\text{unitale, kommutative } C^*\text{-Algebren})^{\text{op}}. \end{aligned}$$

Lemma 3.8. Äquivalenz von Kategorien ist eine Äquivalenzrelation.

Beweis. ÜA; benutze nachfolgende Konstruktion 3.9 i), ii). □

Natürliche Transformationen kann man auf zwei Arten verknüpfen:

- “vertikal” wie in Konstruktion 3.3 und
- “horizontal” wie folgt:

Konstruktion 3.9. i) Seien $\mathcal{B} \xrightarrow{G} \mathcal{C} \begin{array}{c} \xrightarrow{F} \\ \Downarrow \alpha \\ \xrightarrow{F'} \end{array} \mathcal{D} \xrightarrow{H} \mathcal{E}$ gegeben. Dann ist

(a) $\alpha_G = \left(F(GB) \xrightarrow{\alpha_{GB}} F'(GB) \right)_{B \in \mathcal{B}}$ eine natürliche Transformation $\mathcal{B} \xrightarrow{\begin{smallmatrix} FG \\ \Downarrow \alpha_G \\ F'G \end{smallmatrix}} \mathcal{D}$;

(b) $H\alpha = \left(H(FC) \xrightarrow{H\alpha_C} H(FC') \right)_{C \in \mathcal{C}}$ eine natürliche Transformation $\mathcal{C} \xrightarrow{\begin{smallmatrix} HF \\ \Downarrow H\alpha \\ HF' \end{smallmatrix}} \mathcal{E}$.

ii) Seien $\mathcal{C} \xrightarrow{\begin{smallmatrix} F \\ \Downarrow \alpha \\ F' \end{smallmatrix}} \mathcal{D} \xrightarrow{\begin{smallmatrix} H \\ \Downarrow \beta \\ H' \end{smallmatrix}} \mathcal{E}$ natürliche Transformationen. Dann sind die natürlichen Transformationen

$$\begin{array}{ccc} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & F & \\ & \searrow & \\ C & \xrightarrow{F} & \mathcal{D} \\ & \swarrow & \\ & F' & \end{array} \\ \Downarrow \alpha \\ \begin{array}{ccc} & H & \\ & \searrow & \\ \mathcal{D} & \xrightarrow{H} & \mathcal{E} \\ & \swarrow & \\ & H' & \end{array} \end{array} \quad \text{und} \quad \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & F & \\ & \searrow & \\ C & \xrightarrow{F} & \mathcal{D} \\ & \swarrow & \\ & F' & \end{array} \\ \Downarrow \beta \\ \begin{array}{ccc} & H & \\ & \searrow & \\ \mathcal{D} & \xrightarrow{H} & \mathcal{E} \\ & \swarrow & \\ & H' & \end{array} \end{array} \end{array} \quad (1)$$

gleich, denn für jedes $C \in \mathcal{C}$ kommutiert

$$\begin{array}{ccc} HFC & \xrightarrow{H\alpha_C} & HF'C \\ \beta_{FC} \downarrow & & \downarrow \beta_{F'C} \\ H'FC & \xrightarrow{H'\alpha_C} & H'F'C. \end{array}$$

Wir bezeichnen die natürliche Transformation in (1) mit $\beta \bullet \alpha$.

Insbesondere kann man (Cat) nicht nur als Kategorie auffassen, sondern als

- 2-Kategorie mit 2-Zellen (nat. Transformationen) zusätzlich zu den 0-Zellen (Kategorien) und 1-Zellen (Funktoren), oder
- als *angereicherte Kategorie*, bei der $\text{Hom}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ für jedes $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ nicht ein Objekt in (Set), sondern in (Cat) ist.

Teil II

Universelle Eigenschaften

4 Einführung

“Universelle Eigenschaften” bilden den Kern der Kategorientheorie und der Konzepte

- darstellbare Funktoren (§5),
- adjungierte Funktoren (§6),
- Limiten und Kolimiten (§7),
- Kan-Erweiterungen, Enden, ...

Als Beispiel betrachten wir zunächst freie Gruppen.

Beispiel 4.1. • Definition: Eine *freie Gruppe* auf einer Menge X ist eine Gruppe F mit einer Abbildung $\iota: X \rightarrow F$ und der “universellen Eigenschaft”, dass jede Abbildung ϕ von X in eine Gruppe G eindeutig zu einem Homomorphismus $\bar{\phi}: F \rightarrow G$ fortsetzbar ist:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\phi} & G \\ & \searrow \iota & \uparrow \bar{\phi} \\ & & F \end{array}$$

- Existenz: Allgemein bekannt.

Ist $\iota: X \rightarrow F$ eine freie Gruppe auf X , so enthält F für alle $x, y, \dots \in X$ Elemente

$$\iota(x), \iota(y), \dots, \quad \iota(x)^{-1}, \iota(y)^{-1}, \dots, \quad \iota(x)^{\pm 1} \iota(y)^{\pm 1} \iota(x)^{\pm 1}, \dots,$$

und jede Abbildung $\phi: X \rightarrow G$ wird dann eindeutig fortgesetzt durch

$$\iota(x_1)^{\pm 1} \dots \iota(x_n)^{\pm 1} \mapsto \phi(x_1)^{\pm 1} \dots \phi(x_n)^{\pm 1} \quad \text{für alle } x_1, \dots, x_n \in X.$$

Sei W die Menge aller Wörter der Form

$$x_1^{\pm 1} \dots x_n^{\pm 1} \quad \text{mit } n \in \mathbb{N} = \{0, 1, \dots\}, x_1, \dots, x_n \in X. \quad (2)$$

Das Aneinanderhängen von Wörtern macht W zu einem Monoid. Bezeichne $\sim$ die Äquivalenzrelation, die durch

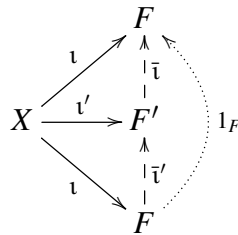
$$w \cdot x^{\pm 1} \cdot x^{\mp 1} \cdot w' \sim ww' \quad \text{für alle } w, w' \in W, x \in X$$

erzeugt wird. Dann ist $FX := W/\sim$ mit der induzierten Verknüpfung eine Gruppe und bezüglich der kanonischen Abbildung $\iota: X \rightarrow W \rightarrow W/\sim$ eine freie Gruppe auf X .

- Eindeutigkeit: *Universelle Eigenschaften charakterisieren Objekte bis auf kanonische Isomorphie*. Seien zwei freie (abelsche) Gruppen auf X gegeben:

$$\begin{array}{ccc} & & F' \\ & \nearrow \iota' & \\ X & & \\ & \searrow \iota & \\ & & F \end{array}$$

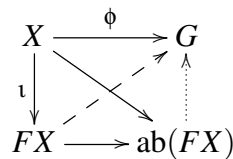
Die universelle Eigenschaft beider Gruppen liefert $\bar{\iota}' : F \rightarrow F'$ und $\bar{\iota} : F' \rightarrow F$.



Die Verknüpfung $\bar{\iota} \circ \bar{\iota}' : F \rightarrow F$ ist eine Fortsetzung von $\iota : X \rightarrow F$, ebenso $1_F : F \rightarrow F$. Nach Definition folgt $\bar{\iota} \circ \bar{\iota}' = 1_F$. Analog zeigt man $\bar{\iota}' \circ \bar{\iota} = 1_{F'}$.

Beispiel 4.2. Ersetzen wir oben (Group) durch (Ab), so erhalten wir:

- Definition: *freie abelsche Gruppen* auf einer Menge X — analog wie oben;
- Eindeutigkeit: analog wie oben;
- Existenz, abstrakt: Ist G eine abelsche Gruppe und $\phi : X \rightarrow G$ eine Abbildung, so erhalten wir



Somit ist $X \rightarrow \text{ab}(FX) = FX/[FX, FX]$ eine freie abelsche Gruppe.

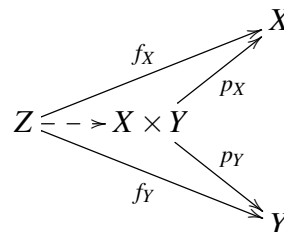
- Existenz, konkret: Die Menge $\mathbb{Z}^{(X)}$ aller Abbildungen von X nach $\mathbb{Z}$ mit endlichem Träger, versehen mit der komponentenweiser Addition und der Abbildung $X \rightarrow \mathbb{Z}^{(X)}, x \mapsto \delta_x$ (Kronecker-Delta).

Weitere Beispiele “frei erzeugter Objekte” bzw. adjungierter Funktoren (§6):

- Beispiele 4.3.**
- das freie Monoid X^* , der freie $\mathbb{k}$ -Vektorraum $\mathbb{k}X$, die freie $\mathbb{k}$ -Algebra $\mathbb{k}\langle X \rangle$, der Polynomring $\mathbb{k}[X]$, ... einer Menge X ;
 - die Grothendieck-Gruppe eines kommutativen Monoids, die Tensoralgebra eines Vektorraumes, der Quotientenkörper eines Integritätsbereichs, die Vervollständigung eines metrischen Raumes, ...

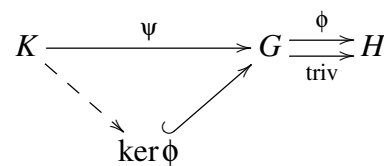
Weitere Beispiele für Objekte mit universellen Eigenschaften ((Ko-)Limiten, §7):

Beispiele 4.4. i) Das Produkt $X \times Y$ zweier Mengen X, Y ist die universelle Menge mit Projektionen p_X, p_Y nach X, Y — jedes Paar von Abbildungen $f_X: Z \rightarrow X$, $f_Y: Z \rightarrow Y$ faktorisiert darüber:



Analoges gilt für das Produkt von Gruppen, topologischen Räumen, ...

ii) Der *Kern* eines Gruppenhomomorphismus $\phi: G \rightarrow H$ ist der universelle Homomorphismus, dessen Verknüpfung mit ϕ trivial ist — jeder Homomorphismus $\psi: K \rightarrow G$, für den $\phi \circ \psi$ trivial ist, faktorisiert über $\ker \phi$:



5 Darstellbare Funktoren und die Yoneda-Einbettung

5.1 Darstellbare Funktoren

Beispiel 5.1. i) Für jede Menge C gibt es eine Bijektion

$$\mathcal{P}(C) := \{\text{Teilmengen von } C\} \equiv \{\text{Abbildungen } C \rightarrow \{0, 1\}\} = \text{Hom}(C, \{0, 1\}).$$

ii) Für jeden unitalen Ring R gibt es eine Bijektion

$$G(R) := \{\text{invertierbare Elemente}\} \equiv \text{Hom}(\mathbb{Z}[X, X^{-1}], R),$$

$$f(Z) \mapsto f,$$

und für jede unitale C^* -Algebra A gibt es eine Bijektion

$$U(A) := \{\text{unitäre Elemente in } A\} \equiv \text{Hom}(C(\mathbb{T}), A),$$

$$f(1_{\mathbb{T}}) \mapsto f.$$

Diese Bijektionen sind Komponenten natürlicher Isomorphismen zwischen Funktoren.

Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie. Jedes $X \in \mathcal{C}$ liefert Funktoren

$$H^X := \text{Hom}(X, -): \mathcal{C} \rightarrow (\text{Set}), \quad \begin{cases} C & \mapsto \text{Hom}(X, C), \\ (C \xrightarrow{f} C') & \mapsto \left(\text{Hom}(X, C) \xrightarrow[g \mapsto f \circ g]{f_*} \text{Hom}(X, C') \right), \end{cases}$$

und

$$H_X := \text{Hom}(-, X): \mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow (\text{Set}), \quad \begin{cases} C & \mapsto \text{Hom}(C, X), \\ (C \xrightarrow{f} C') & \mapsto \left(\text{Hom}(C', X) \xrightarrow[g \mapsto g \circ f]{f_*} \text{Hom}(C, X) \right). \end{cases}$$

Funktoren $\mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow (\text{Set})$ beziehungsweise $\mathcal{C} \rightarrow (\text{Set})$ nennt man auch *Prägarben* bzw. *Diagramme* auf $\mathcal{C}$.

Definition 5.2. Ein Funktor $F: \mathcal{C} \rightarrow (\text{Set})$ bzw. $F: \mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow (\text{Set})$ heißt darstellbar, falls $F \cong H^X$ bzw. $F \cong H_X$ für ein $X \in \mathcal{C}$. Eine Darstellung von F ist die Wahl eines solchen Isomorphismus.

Typisches Vorgehen: Man charakterisiert ein gewünschtes Objekt X in $\mathcal{C}$, indem sagt, wie H^X oder H_X aussehen soll.

Ende d. Vorlesung
vom 26.10.2011

Beispiel 5.3. Sei X eine Menge. Für jede Gruppe G bezeichne $|G|$ die zugrundeliegende Menge. Dann gibt es einen Funktor

$$F^X: (\text{Group}) \rightarrow (\text{Set}), \quad \begin{cases} G & \mapsto \text{Hom}(X, |G|), \\ (G \xrightarrow{\pi} H) & \mapsto (\text{Hom}(X, |G|) \xrightarrow{\pi_*} \text{Hom}(X, |H|)) \end{cases}$$

Ist F^X darstellbar? Ja. Sei $\iota: X \rightarrow \langle X \rangle$ eine freie Gruppe auf X . Dann haben wir

- für jede Gruppe G eine Bijektion

$$\alpha_G: F^X G \rightarrow \text{Hom}(\langle X \rangle, G), \quad \phi \mapsto \text{Fortsetzung } \bar{\phi} \text{ in } \begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\phi} & G \\ & \searrow \iota & \uparrow \bar{\phi} \\ & & \langle X \rangle \end{array}$$

- für jeden Gruppenhomomorphismus $G \xrightarrow{\pi} H$ ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} F^X G & \xrightarrow{F^X \pi} & F^X H \\ \alpha_G \downarrow & & \downarrow \alpha_H \\ \text{Hom}(\langle X \rangle, G) & \xrightarrow{\pi_*} & \text{Hom}(\langle X \rangle, H), \end{array}$$

weil für jedes $\phi \in F^X G$, also jede Abbildung $\phi: X \rightarrow G$, die Bilder

$$(\alpha_H \circ F^X \pi)(\phi) = \alpha_H(\pi \circ \phi) = \overline{\pi \circ \phi}, \quad (\pi_* \circ \alpha_G)(\phi) = \pi \circ \bar{\phi}$$

Fortsetzungen von $\pi \circ \phi: X \rightarrow H$ und somit gleich sind:

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{\phi} & G & \xrightarrow{\pi} & H \\ & \searrow \iota & \uparrow \bar{\phi} & \nearrow \pi \circ \bar{\phi} & \\ & & \langle X \rangle & & \end{array}$$

Beispiel 5.4. Seien $X, Y \in \mathcal{C}$. Dann gibt es einen Funktor

$$H_X \times H_Y: \mathcal{C} \rightarrow (\text{Set}), \quad \begin{cases} Z \mapsto H_X(Z) \times H_Y(Z) = \left\{ \text{Diagramme } \begin{array}{ccc} & Z & \\ X & \swarrow & \searrow \\ & Y & \end{array} \right\} \\ (Z \xrightarrow{f} Z') \mapsto H_X(f) \times H_Y(f). \end{cases}$$

Ist dieser darstellbar? Das hängt von $\mathcal{C}$ ab:

- Ja, falls z.B. $\mathcal{C} = (\text{Set}), (\text{Group}), (\text{Top})$; ein darstellendes Objekt ist dann $X \times Y$;
- Nein, falls z.B. $\mathcal{C} = (\text{fGroup})^{\text{op}}$, wobei (fGroup) die Kategorie aller endlichen Gruppen ist (später ÜA in §7).

5.2 Das Yoneda-Lemma

Wir kommen nun zum Kern dieses Kapitels:

Frage Wie sehen zu gegebenem $F: \mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow (\text{Set})$ und $X \in \mathcal{C}$ die natürlichen Transformationen von H_X zu F aus?

Zentrale Idee Jede Transformation $\alpha: H_X \rightarrow F$ ist bereits durch α_X bestimmt!

Beweis: Sei $Y \in \mathcal{C}$. Worauf bildet $\alpha_Y: \text{Hom}(Y, X) \rightarrow FY$ einen Morphismus $Y \xrightarrow{f} X$ ab? Die Antwort liefert das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc} 1_X & \xrightarrow{\quad} & f \\ \downarrow & \text{Hom}(X, X) \xrightarrow{f^*} \text{Hom}(Y, X) & \downarrow \\ \alpha_X & \downarrow \alpha_X & \downarrow \alpha_Y \\ & FX \xrightarrow{Ff} FY & \\ \alpha_X(1_X) & \xrightarrow{\quad} & (Ff)(\alpha_X(1_X)) = \alpha_Y(f). \end{array} \quad (3)$$

Theorem 5.5 (Yoneda-Lemma). Für jedes $X \in \mathcal{C}$ und $F: \mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow (\text{Set})$ ist

$$\mathcal{Y}_{X,F}: \text{Hom}(H_X, F) \rightarrow FX, \quad \alpha \mapsto \alpha_X(1_X),$$

bijektiv.

Das Theorem folgt leicht aus folgendem Lemma:

Lemma 5.6. Sei $x \in FX$. Definiere für jedes $Y \in \mathcal{C}$

$$\tilde{x}_Y: \text{Hom}(Y, X) = H_X(Y) \rightarrow FY, \quad (Y \xrightarrow{f} X) \mapsto (Ff)(x).$$

Dann ist $\tilde{x} = (\tilde{x}_Y)_{Y \in \mathcal{C}}$ eine natürliche Transformation von H_X nach F .

Beweis. Für jeden Morphismus $Y \xrightarrow{g} Y'$ in $\mathcal{C}$ kommutiert

$$\begin{array}{ccc} f \vdash & \xrightarrow{\quad} & f \circ g \\ \downarrow & \text{Hom}(Y', X) \xrightarrow{g^*} \text{Hom}(Y, X) & \downarrow \\ & \tilde{x}_{Y'} \downarrow \quad \quad \downarrow \tilde{x}_Y & \\ & FY' \xrightarrow{Fg} FY & \\ \downarrow & & \downarrow \\ Ff(x) \vdash & \xrightarrow{\quad} & Fg(Ff(x)) = F(f \circ g)(x) \end{array}$$

□

Beweis von Theorem 5.5. Die Abbildungen $\alpha \mapsto \alpha_X(1_X)$ und $\tilde{x} \mapsto x$ sind zueinander invers:

- für jedes $\alpha \in \text{Hom}(H_X, F)$ gilt $\alpha = \widetilde{\alpha_X(1_X)}$ nach (3);
- für jedes $x \in FX$ gilt $\tilde{x}_X(1_X) = (F1_X)(x) = 1_{FX}(x) = x$.

□

Bemerkung 5.7. Eine Darstellung von einem Funktor $F: \mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow (\text{Set})$ ist also gegeben durch ein $X \in \mathcal{C}$ und ein Element $x \in FX$ mit der Eigenschaft, dass für jedes $Y \in \mathcal{C}$ die Abbildung $\text{Hom}(Y, X) \rightarrow FY, \quad (Y \xrightarrow{f} X) \mapsto (Ff)(x)$, bijektiv ist.

Beispiel 5.8. Der Potenzmengen-Funktor

$$\mathcal{P}: (\text{Set})^{\text{op}} \rightarrow (\text{Set}), \quad \begin{cases} X & \mapsto \mathcal{P}(X), \\ (X \xrightarrow{f} Y) & \mapsto f^{-1}, \end{cases}$$

ist darstellbar: Eine Darstellung ist gegeben durch $\{0, 1\} \in (\text{Set})$ und

$$\{1\} \in \mathcal{P}(\{0, 1\}).$$

Die natürliche Transformation $\widetilde{\{1\}}: H_{\{0,1\}} \rightarrow \mathcal{P}$ ist gegeben durch

$$\widetilde{\{1\}}_Y: \text{Hom}(Y, \{0, 1\}) \rightarrow \mathcal{P}(Y), \quad (Y \xrightarrow{f} \{0, 1\}) \mapsto (\mathcal{P}f)(\{1\}) = f^{-1}(\{1\}) \subseteq Y.$$

Ersetzen wir $\mathcal{C}$ durch $\mathcal{C}^{\text{op}}$, erhalten wir entsprechende Aussagen in $[\mathcal{C}, (\text{Set})]$.

Beispiel 5.9. Sei X eine Menge und $\mathbf{1}: X \rightarrow \langle X \rangle$ eine freie Gruppe auf X . Dann ist eine Darstellung von $F^X: (\text{Group}) \rightarrow (\text{Set})$ gegeben durch $\langle X \rangle$ und

$$\mathbf{1} \in F^X \langle X \rangle = \text{Hom}(X, |\langle X \rangle|).$$

Die natürliche Transformation $\tilde{\mathbf{1}}: H^{\langle X \rangle} \rightarrow F^X$ ist gegeben durch

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{1}}_G: \text{Hom}(\langle X \rangle, G) &\rightarrow F^X G = \text{Hom}(X, |G|), \\ (\langle X \rangle \xrightarrow{\phi} G) &\mapsto (F^X \phi)(\mathbf{1}) = \phi_* \mathbf{1} = \phi \circ \mathbf{1} = \phi|_X, \end{aligned}$$

also das Inverse von $\alpha: F^X \rightarrow H^{\langle X \rangle}$ in Beispiel 5.3.

5.3 Die Yoneda-Einbettung

Als Anwendung erhalten wir die Yoneda-Einbettung $H_\bullet: \mathcal{C} \rightarrow [\mathcal{C}^{\text{op}}, (\text{Set})]$.

Lemma 5.10. Jeder Morphismus $X \xrightarrow{f} Y$ in $\mathcal{C}$ liefert eine natürliche Transformation $H_f: H_X \rightarrow H_Y$, gegeben durch

$$\begin{aligned} (H_f)_Z = f_*: H_X(Z) = \text{Hom}(Z, X) &\rightarrow \text{Hom}(Z, Y) = H_Y(Z), \\ (Z \xrightarrow{g} X) &\mapsto (Z \xrightarrow{g} X \xrightarrow{f} Y) \quad \text{für jedes } Z \in \mathcal{C}. \end{aligned}$$

Wir beweisen dieses Lemma nicht (ist einfach); es wird aus Lemma 5.13 folgen.

Lemma 5.11. Die folgenden Zuordnungen bilden einen Funktor:

$$H_\bullet: \mathcal{C} \rightarrow [\mathcal{C}^{\text{op}}, (\text{Set})], \quad \begin{cases} X &\mapsto H_X, \\ (X \xrightarrow{f} Y) &\mapsto H_f. \end{cases} \quad (4)$$

Beweis. Für jedes $X \in \mathcal{C}$ gilt $H_{1_X} = ((1_X)_*)_{Z \in \mathcal{C}} = 1_{H_X}$.

Für alle Morphismen $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ in $\mathcal{C}$ gilt $H_g \circ H_f = (g_* \circ f_*)_{Z \in \mathcal{C}} = H_{g \circ f}$ □

Theorem 5.12 (Yoneda-Einbettung). Der Funktor (4) ist volltreu.

Lemma 5.13. Für jeden Morphismus $X \xrightarrow{f} Y$ in $\mathcal{C}$ gilt $H_f = \mathcal{Y}_{X, H_Y}^{-1}(f)$:

$$\begin{aligned} \text{Hom}(H_X, H_Y) &\xleftarrow{\mathcal{Y}_{X, H_Y}^{-1}} H_Y(X) = \text{Hom}(X, Y), \\ H_f &= \tilde{f} \longleftarrow f. \end{aligned}$$

Beweis. Für jedes $Z \in \mathcal{C}$ ist $\tilde{f}_Z$ gegeben durch

$$\begin{aligned} (\tilde{f})_Z: H_X(Z) = \text{Hom}(Z, X) &\rightarrow \text{Hom}(Z, Y) = H_Y(Z), \\ (Z \xrightarrow{g} X) &\mapsto (H_Y(g))(f) = g^*(f) = f \circ g. \end{aligned} \quad \square$$

Beweis von Theorem 5.12. Folgt unmittelbar aus Lemma 5.13 und Theorem 5.5. □

5.4 Natürlichkeit der Yoneda-Abbildung

Die Abbildung $\mathcal{Y}_{X,F}$ im Yoneda-Lemma 5.5 ist natürlich bezüglich $X \in \mathcal{C}$ und $F \in [\mathcal{C}^{\text{op}}, (\text{Set})]$. Die exakte Formulierung erfordert folgende Funktoren:

Lemma 5.14. *Für alle Kategorien $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{D}$ gibt es Funktoren*

$$\text{Hom}: \mathcal{D}^{\text{op}} \times \mathcal{D} \rightarrow (\text{Set}), \quad \begin{cases} (X, Y) \mapsto \text{Hom}(X, Y), \\ (f, g) \mapsto f^* \circ g_* = g_* \circ f^*, \end{cases}$$

und

$$\text{ev}: \mathcal{A} \times [\mathcal{A}, \mathcal{B}] \rightarrow \mathcal{B}, \quad \left\{ \begin{array}{l} (A, F) \mapsto F(A), \\ (A, F) \xrightarrow{(g, \beta)} (A', F') \mapsto \end{array} \right.$$

Beweis. Einfache ÜA. □

Theorem 5.15. *Die Familie $\mathcal{Y} = (\mathcal{Y}_{X,F})_{(X,F)}$ ist ein natürlicher Isomorphismus*

$$\begin{array}{ccc} & [\mathcal{C}^{\text{op}}, (\text{Set})]^{\text{op}} \times [\mathcal{C}^{\text{op}}, (\text{Set})] & \\ H_{\bullet}^{\text{op}} \times 1 \nearrow & \Downarrow \mathcal{Y} & \searrow \text{Hom} \\ \mathcal{C}^{\text{op}} \times [\mathcal{C}^{\text{op}}, (\text{Set})] & \xrightarrow{\text{ev}} & (\text{Set}). \end{array}$$

Beweis. Für jeden Morphismus $(X, F) \xrightarrow{(g, \beta)} (X', F')$ in $\mathcal{C}^{\text{op}} \times [\mathcal{C}^{\text{op}}, (\text{Set})]$ kommutiert

$$\begin{array}{ccc} \alpha \vdash & \xrightarrow{\quad} & \beta \circ \alpha \circ H_g \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{Hom}(H_X, F) & \xrightarrow{(H_g)^* \circ \beta_*} & \text{Hom}(H_{X'}, F') \\ \mathcal{Y}_{X,F} \downarrow & & \downarrow \mathcal{Y}_{X',F'} \\ F(X) & \xrightarrow{F'g \circ \beta_X} & F'(X'), \\ \alpha_X(1_X) & \xrightarrow{\quad} & (F'(g)\beta_X\alpha_X)(1_X) = (\beta_{X'}\alpha_{X'})(g) = (\beta_{X'}\alpha_{X'}H_X(g))(1_X), \end{array}$$

weil $H_X \xrightarrow{\alpha} F \xrightarrow{\beta} F'$ eine natürliche Transformation ist. □

6 Adjungierte Funktoren

6.1 Definition, Beispiele und Zusammenhang zu Darstellbarkeit

Idee Adjunktion zwischen Funktoren ist analog zur Adjunktion linearer Abbildungen.

Wiederholung Jede lineare Abbildung zwischen $\mathbb{k}$ -Vektorräumen $f: V \rightarrow W$ besitzt eine duale oder adjungierte Abbildung $f': W' \rightarrow V'$, welche

i) folgende Gleichung erfüllt:

$$\langle \phi | f(v) \rangle = \langle f'(\phi) | v \rangle \quad \text{für alle } v \in V, \phi \in W',$$

wobei $\langle \cdot | \cdot \rangle$ jeweils die natürliche Paarung bezeichnet; oder äquivalent

ii) folgendes Diagramm kommutativ macht:

$$\begin{array}{ccc} W' \times V & \xrightarrow{f' \times 1_V} & V' \times V \\ 1_{W'} \times f \downarrow & & \downarrow \langle \cdot | \cdot \rangle \\ W' \times W & \xrightarrow{\langle \cdot | \cdot \rangle} & \mathbb{k}. \end{array} \quad (5)$$

Übertragung auf Funktoren:

Definition 6.1. Seien $\mathcal{C} \xrightleftharpoons[G]{F} \mathcal{D}$ Funktoren. Man nennt

- F links-adjungiert zu G ,
- G rechts-adjungiert zu F ,

geschrieben $F \dashv G$ oder $\mathcal{C} \xrightleftharpoons[G]{F} \mathcal{D}$, falls

i) (intuitiv) es für alle $X \in \mathcal{C}, Y \in \mathcal{D}$ Bijektionen

$$\text{Hom}_{\mathcal{D}}(FX, Y) \cong \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, GY) \quad (6)$$

gibt, die natürlich bezüglich $X \in \mathcal{C}$ und $Y \in \mathcal{D}$ sind, oder äquivalent

ii) (formal) das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}^{\text{op}} \times \mathcal{D} & \xrightarrow{F \times 1_{\mathcal{D}}} & \mathcal{D}^{\text{op}} \times \mathcal{D} \\ 1_{\mathcal{C}^{\text{op}}} \times G \downarrow & & \downarrow \text{Hom} \\ \mathcal{C}^{\text{op}} \times \mathcal{C} & \xrightarrow{\text{Hom}} & (\text{Set}) \end{array}$$

bis auf einen natürlichen Isomorphismus kommutiert, also die Funktoren

$$\mathrm{Hom}(F \cdot, \cdot): \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{D} \xrightarrow{F \times 1_{\mathcal{D}}} \mathcal{D}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{D} \xrightarrow{\mathrm{Hom}} (\mathrm{Set})$$

und

$$\mathrm{Hom}(\cdot, G \cdot): \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{D} \xrightarrow{1_{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}} \times G} \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{C} \xrightarrow{\mathrm{Hom}} (\mathrm{Set})$$

natürlich isomorph sind.

Wir schreiben in dem Fall die Bijektionen (6) als $\phi \mapsto \bar{\phi}$ und $\bar{\psi} \leftarrow \psi$, und nennen die Wahl eines solchen natürlichen Isomorphismus eine Adjunktion zwischen F und G .

Zahlreiche “universelle” Konstruktionen — alle aus Beispiel 4.3 — sind Links-Adjungierte zu Vergiss-Funktoren.

Beispiele 6.2. Es gibt Adjunktionen

$$\text{i)} \quad (\mathrm{Set}) \begin{array}{c} \xrightarrow{\text{freie Gruppe} \\ X \mapsto \langle X \rangle} \\ \xleftarrow[\text{Vergiss-Funktor}]{\perp} \\ |G| \leftarrow G \end{array} (\mathrm{Group}), \quad \mathrm{Hom}(\langle X \rangle, G) \cong \mathrm{Hom}(X, |G|),$$

$$\text{ii)} \quad \left(\begin{array}{c} \text{metrische} \\ \text{Räume} \end{array} \right) \begin{array}{c} \xrightarrow{\text{Vervollständigung} \\ X \mapsto \bar{X}} \\ \xleftarrow[\text{Inklusion}]{\perp} \end{array} \left(\begin{array}{c} \text{vollständige} \\ \text{metrische} \\ \text{Räume} \end{array} \right), \quad \mathrm{Hom}(\bar{X}, Y) \cong \mathrm{Hom}(X, Y),$$

$$\text{iii)} \quad (\mathrm{Vect}_{\mathbb{K}}) \begin{array}{c} \xrightarrow{\text{Tensor-Algebra} \\ V \mapsto TV = \bigoplus_n V^{\otimes n}} \\ \xleftarrow[\text{Vergiss-Funktor } U]{\perp} \end{array} (\mathrm{Alg}_{\mathbb{K}}), \quad \mathrm{Hom}(TV, A) \cong \mathrm{Hom}(V, UA),$$

$$\text{iv)} \quad (\mathrm{Group}) \begin{array}{c} \xrightarrow{\text{Gruppenring} \\ G \mapsto \mathbb{Z}G} \\ \xleftarrow[\text{multipl. Gruppe}]{\perp} \\ R^{\times} \leftarrow R \end{array} (\mathrm{Ring}_1), \quad \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}G, R) \cong \mathrm{Hom}(G, R^{\times}),$$

$$(\mathrm{Group}) \begin{array}{c} \xrightarrow{G \mapsto C^*(G)} \\ \xleftarrow[\text{U(A) } \leftarrow A]{\perp} \end{array} (C^*\text{-Alg}_1), \quad \mathrm{Hom}(C^*(G), A) \cong \mathrm{Hom}(G, U(A)),$$

$$\text{v)} \quad (\mathrm{Top}) \begin{array}{c} \xrightarrow{\text{Stone-Čech-Kompakt.} \\ X \mapsto \hat{X}} \\ \xleftarrow[\text{Inklusion}]{\perp} \end{array} \left(\begin{array}{c} \text{kompakte} \\ \text{Hausdorff-} \\ \text{Räume} \end{array} \right), \quad \mathrm{Hom}(\hat{X}, Y) \cong \mathrm{Hom}(X, Y).$$

Hier ist der links-adjungierte Funktor

- auf Objekten durch gewisse universelle Eigenschaften definiert,
- auf Morphismen durch die universelle Eigenschaft definierbar;

z.B. wird in i) $X \mapsto \langle X \rangle$ zu einem Funktor fortgesetzt mittels

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{f} & X' & \longrightarrow & \langle X' \rangle \\ & \searrow & & \nearrow \langle f \rangle & \\ & & \langle X \rangle & & \end{array}$$

Allgemeines Prinzip der obigen Beispiele: Adjungierbarkeit von Funktoren folgt aus “punktweiser Darstellbarkeit”, ähnlich wie bei Hilberträumen die Adjungierbarkeit linearer Abbildungen aus dem Riesz’schen Darstellungssatz folgt.

Proposition 6.3. Sei $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ ein Funktor. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- F besitzt ein Rechts-Adjungiertes $G: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$
- Für jedes $Y \in \mathcal{D}$ ist der Funktor $\text{Hom}(F \cdot, Y): \mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow (\text{Set})$ darstellbar.

Ende d. Vorlesung
vom 08.11.2011

Beweis. i) $\Rightarrow$ ii): Für jedes Y ist $\text{Hom}(F \cdot, Y) \cong \text{Hom}(\cdot, GY) = H_{GY}$.

ii) $\Rightarrow$ i): *Definition von G auf Objekten:* Wähle für jedes $Y \in \mathcal{D}$ eine Darstellung

$$\alpha_Y: H_{GY} = \text{Hom}(\cdot, GY) \xrightarrow{\cong} \text{Hom}(F \cdot, Y).$$

Definition von G auf Morphismen: Jeder Morphismus $Y \xrightarrow{g} Y'$ in $\mathcal{D}$ liefert eine natürliche Transformation

$$\begin{array}{ccc} H_{GY} = \text{Hom}(\cdot, GY) & \xrightarrow{\alpha_Y} & \text{Hom}(F \cdot, Y) \\ \alpha_{Y'}^{-1} \circ g_* \circ \alpha_Y = H_{Gg} \downarrow & & \downarrow g_* \\ H_{GY'} = \text{Hom}(\cdot, GY') & \xleftarrow{\alpha_{Y'}^{-1}} & \text{Hom}(F \cdot, Y'), \end{array} \quad (7)$$

welche nach der Theorem 5.12 die Form H_{Gg} für genau ein $Gg \in \text{Hom}(GY, GY')$ hat.

G wird ein Funktor: Folgt einfach aus der Konstruktion.

Natürlichkeit: Die Bijektionen $\text{Hom}(X, GY) \cong \text{Hom}(FX, Y)$ sind natürlich bezüglich

- X wegen Natürlichkeit der α_Y ,
- Y wegen Kommutativität von (7).

□

Ähnlich kann man die Existenz eines links-adjungierten Funktors charakterisieren.

Bemerkung 6.4. Sei $\mathcal{C} \xrightleftharpoons[\underset{G}{\leftarrow \perp}]{\underset{F}{\rightarrow}} \mathcal{D}$ eine Adjunktion. Fasst man

- F als Funktor $\mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{D}^{\text{op}}$ und
- G als Funktor $\mathcal{D}^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{C}^{\text{op}}$ auf,

so tauschen F und G die Rollen (Rechts-/Links-Adjungiertes zu sein): Man erhält natürliche Bijektionen

$$\text{Hom}_{\mathcal{D}^{\text{op}}}(Y, FX) = \text{Hom}_{\mathcal{D}}(FX, Y) \cong \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, GY) = \text{Hom}_{\mathcal{C}^{\text{op}}}(GY, X)$$

für alle $X \in \mathcal{C}, Y \in \mathcal{D}$, also eine Adjunktion $\mathcal{D}^{\text{op}} \xrightleftharpoons[\underset{F}{\leftarrow \perp}]{\underset{G}{\rightarrow}} \mathcal{C}^{\text{op}}$.

6.2 Eins und Koeins einer Adjunktion

Sei $\mathcal{C} \xrightleftharpoons[\underset{G}{\leftarrow \perp}]{\underset{F}{\rightarrow}} \mathcal{D}$ eine Adjunktion. Wir untersuchen nun die natürlichen Bijektionen

$$\text{Hom}(FX, Y) \xrightleftharpoons[\underset{\bar{g} \mapsto g}{\leftarrow}]{\underset{f \mapsto \bar{f}}{\rightarrow}} \text{Hom}(X, GY) \quad (X \in \mathcal{C}, Y \in \mathcal{D}). \quad (8)$$

Wie beim Yoneda-Lemma sind diese Abbildungen wegen ihrer Natürlichkeit eindeutig bestimmt durch ihre Wirkung auf Identitäten von Objekten:

- *Argument 1 — direkt:*

$$\begin{array}{ccc} 1_{FX} & \xrightarrow{\quad \quad \quad} & f \\ \downarrow & \begin{array}{ccc} \text{Hom}(FX, FX) & \xrightarrow{f_*} & \text{Hom}(FX, Y) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{Hom}(X, GFX) & \xrightarrow{(Gf)_*} & \text{Hom}(X, GY) \end{array} & \downarrow \\ \eta_X := \overline{1_{FX}} & \xrightarrow{\quad \quad \quad} & (Gf) \circ \eta_X = \bar{f}. \end{array}$$

- *Argument 2 — Rückführung auf Yoneda-Lemma:* Für alle $X \in \mathcal{C}, Y \in \mathcal{D}$ ist die Abbildung

$$H_{GY}(X) = \text{Hom}(X, GY) \xrightarrow{g \mapsto \bar{g}} \text{Hom}(FX, Y)$$

Komponente einer natürlichen Transformation $H_{GY} \rightarrow \text{Hom}(F \cdot, Y)$, also nach Theorem 5.5 gegeben durch

$$g \mapsto \bar{g} = \text{Hom}(F \cdot, Y)(g)(\overline{1_{GY}}) = (Fg)^* \underbrace{\overline{1_{GY}}}_{=: \varepsilon_Y} = \varepsilon_Y \circ Fg.$$

Proposition 6.5. i) Die Familien $\eta := (\overline{1_{FX}})_{X \in \mathcal{C}}$ und $\varepsilon := (\overline{1_{GY}})_{Y \in \mathcal{D}}$ sind natürliche Transformationen $\eta: 1_{\mathcal{C}} \rightarrow GF$ und $\varepsilon: FG \rightarrow 1_{\mathcal{D}}$.

ii) Für alle Morphismen $FX \xrightarrow{f} Y$ und $X \xrightarrow{g} GY$ sind $\bar{f}$ und $\bar{g}$ gegeben durch

$$X \xrightarrow{\eta_X} GFX \xrightarrow{Gf} GY \quad \text{und} \quad FX \xrightarrow{Fg} FGY \xrightarrow{\varepsilon_Y} Y.$$

Beweis. ii) Bereits gezeigt. i) Zeigen wir nur für ε ; für η dann analog. Für jeden Morphismus $Y \xrightarrow{g} Y'$ in $\mathcal{D}$ kommutiert

$$\begin{array}{ccc} FGY & \xrightarrow{FGg} & FGY' \\ \varepsilon_Y \downarrow & & \downarrow \varepsilon_{Y'} \\ Y & \xrightarrow{g} & Y', \end{array}$$

weil das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccccc} \varepsilon_Y & \xleftarrow{\hspace{10em}} & & & 1_{GY} \\ \downarrow & & \text{Hom}(FGY, Y) \xleftarrow{\hspace{2em}} \text{Hom}(GY, GY) & & \downarrow \\ & & g_* \downarrow & & \downarrow (Gg)_* \\ & & \text{Hom}(FGY, Y') \xleftarrow{\hspace{2em}} \text{Hom}(GY, GY') & & \\ \downarrow & & & & \downarrow \\ g \circ \varepsilon_Y = \varepsilon_{Y'} \circ FGg & \xleftarrow{\hspace{10em}} & & & Gg \end{array}$$

□

Definition 6.6. Man nennt η die Eins und ε die Koeins der Adjunktion $\mathcal{C} \xrightleftharpoons[\underset{G}{\perp}]{\underset{F}{\perp}} \mathcal{D}$.

Beispiel 6.7. Betrachte $(\text{Set}) \xrightleftharpoons[\underset{|\cdot|}{\perp}]{\underset{\langle \cdot \rangle}{\perp}} (\text{Group})$ aus Beispiel 6.2 i).

Für jede Menge X ist die Eins $\eta_X: X \rightarrow |\langle X \rangle|$ die Einbettung in die zugrundeliegende Menge der freien Gruppe (als Erzeuger).

Für jede Gruppe G entspricht die Koeins $\varepsilon_G: \langle |G| \rangle \rightarrow G$ unter der Bijektion

$$\text{Hom}_{(\text{Group})}(\langle |G| \rangle, G) \equiv \text{Hom}_{(\text{Set})}(|G|, |G|)$$

der Identität $1_{|G|}$, ist also deren Fortsetzung zu einem Homomorphismus:

$$\begin{array}{ccc} \langle |G| \rangle & \xrightarrow[\text{Ausmultiplizieren}]{\varepsilon_G} & G, \\ \underbrace{g_1^{\pm 1} \cdots g_n^{\pm 1}}_{\text{formales Wort}} & \longmapsto & \underbrace{g_1^{\pm 1} \cdots g_n^{\pm 1}}_{\text{Produkt in } G}. \end{array}$$

Welche Eigenschaften von ε und η entsprechen der Tatsache, dass die Abbildungen (8) zueinander invers sind?

Proposition 6.8. *Die folgenden Diagramme kommutieren:*

$$\begin{array}{ccc} F & \xrightarrow{1_F} & F, \\ F \searrow \eta & & \nearrow \varepsilon_F \\ & FGF & \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{1_G} & G, \\ G \searrow \eta_G & & \nearrow G\varepsilon \\ & GFG & \end{array} \quad (\text{Dreiecks-Identitäten})$$

Beweis. Für alle $X \in \mathcal{C}, Y \in \mathcal{D}$ gilt

- für $FGY \xrightarrow{\varepsilon_Y} Y$ die Gleichung $1_{GY} = \overline{1_{GY}} = \overline{\varepsilon_Y} = G\varepsilon_Y \circ \eta_{GY}$;
- für $X \xrightarrow{\eta_X} GFX$ die Gleichung $1_{FX} = \overline{1_{FX}} = \overline{\eta_X} = \varepsilon_{FX} \circ F\eta_X$. □

Beispiel 6.9. Seien $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ partielle Ordnungen, betrachtet als Kategorien (Beispiel 1.5), d.h.

$$|\text{Hom}(X, X')| = \begin{cases} 1, & X \leq X', \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \quad \text{für alle } X, X' \in \mathcal{C} \text{ bzw. } X, X' \in \mathcal{D},$$

Eine *Galois-Verbindung* zwischen $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ ist eine Adjunktion $\mathcal{C} \xrightleftharpoons[G]{F} \mathcal{D}^{\text{op}}$; siehe Blatt 5, Aufgabe 3. Die Eins und Koeins entsprechen dann den Relationen

$$X \leq GF(X) \text{ für alle } X \in \mathcal{C}, \qquad FG(Y) \leq Y \text{ für alle } Y \in \mathcal{D}.$$

Beispiel: Sei $\mathbb{k}$ ein Körper und $n \in \mathbb{N}$. Dann gibt es eine Adjunktion

$$\mathcal{P}(\mathbb{k}^n) \xrightleftharpoons[V]{J} \mathcal{P}(\mathbb{k}[X_1, \dots, X_n])^{\text{op}},$$

wobei die Potenzmengen jeweils als Kategorie bezüglich der Inklusionen betrachtet werden und

- für jedes $X \subseteq \mathbb{k}^n$ das Bild $J(X) = \{p \in \mathbb{k}[X_1, \dots, X_n] : p|_X = 0\}$ das Ideal der auf X verschwindenden Polynome ist,
- für jede Teilmenge $Y \subseteq \mathbb{k}[X_1, \dots, X_n]$ das Bild $V(Y) = \bigcap_{p \in Y} p^{-1}(0)$ die gemeinsame Nullstellenmenge ist.

Die Dreiecksidentitäten besagen $JVJ = J$ und $VJV = V$.

Umgekehrt bestimmen natürliche Transformationen η, ε mit obiger Eigenschaft stets eine Adjunktion:

Proposition 6.10. Seien $\mathcal{C} \xrightleftharpoons[G]{F} \mathcal{D}$ Funktoren und $1_{\mathcal{C}} \xrightarrow{\eta} GF, FG \xrightarrow{\varepsilon} 1_{\mathcal{D}}$ natürliche Transformationen, die die Dreiecks-Identitäten erfüllen. Dann formen die Abbildungen

$$\mathrm{Hom}(FX, Y) \xrightleftharpoons[\bar{g} := \varepsilon_Y \circ Fg \leftarrow g]{f \mapsto \bar{f} := Gf \circ \eta_X} \mathrm{Hom}(X, GY) \quad (X \in \mathcal{C}, Y \in \mathcal{D}) \quad (9)$$

eine Adjunktion $F \dashv G$.

Beweis. Die Abbildungen sind

- zueinander invers — für alle Morphismen $FX \xrightarrow{f} Y$ und $X \xrightarrow{g} GY$ gilt

$$\bar{\bar{f}} = \varepsilon_Y \circ F\bar{f} = \varepsilon_Y \circ FGf \circ F\eta_X = f \circ \varepsilon_{FX} \circ F\eta_X = f$$

und analog $\bar{\bar{g}} = g$;

- natürlich, denn für alle Morphismen $X' \xrightarrow{h} X, Y \xrightarrow{k} Y'$ kommutiert

$$\begin{array}{ccc} f & \xrightarrow{\quad\quad\quad} & Gf \circ \eta_X \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Hom}(FX, Y) & \rightarrow & \mathrm{Hom}(X, GY) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Hom}(FX', Y') & \rightarrow & \mathrm{Hom}(X', GY') \\ k \circ f \circ Fh & \xrightarrow{\quad\quad\quad} & G(kf(Fh)) \circ \eta_{X'} = Gk \circ (Gf \circ \eta_X) \circ h. \end{array} \quad \square$$

7 Limites und Kolimites

7.1 Definition und erste Beispiele

Charakterisiert man ein Objekt in einer Kategorie durch eine universelle Eigenschaft, dann ist das Objekt in der Regel ein Limes oder Kolimes:

Definition 7.1. Sei $\mathbb{I}$ eine kleine und $\mathcal{C}$ eine beliebige Kategorie.

- Ein Diagramm der Form $\mathbb{I}$ oder über $\mathbb{I}$ in $\mathcal{C}$ ist ein Funktor $D: \mathbb{I} \rightarrow \mathcal{C}$.

Sei $D: \mathbb{I} \rightarrow \mathcal{C}$ ein Diagramm.

- Ein Kegel von $A \in \mathcal{C}$ auf D ist eine Familie $(A \xrightarrow{q_I} DI)_{I \in \mathbb{I}}$ von Morphismen in $\mathcal{C}$ so, dass für jeden Morphismus $I \xrightarrow{k} J$ in $\mathbb{I}$ das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} & & DI \\ & \nearrow q_I & \downarrow Dk \\ A & & \\ & \searrow q_J & \\ & & DJ \end{array}$$

kommutiert.

Ein Limes für D ist ein Kegel $(L \xrightarrow{p_I} DI)_{I \in \mathbb{I}}$ so, dass für jeden Kegel $(A \xrightarrow{q_I} DI)_{I \in \mathbb{I}}$ genau ein Morphismus $A \xrightarrow{\bar{q}} L$ existiert mit $q_I = p_I \circ \bar{q}$ für alle $I \in \mathbb{I}$:

$$\begin{array}{ccccc} & & q_I & & DI \\ & \nearrow & & \nearrow p_I & \\ A & \xrightarrow{-\exists! \bar{q}-} & L & & \\ & \searrow & & \searrow p_J & \\ & & q_J & & DJ \end{array}$$

Wir nennen dann auch L einen Limes und $(L \xrightarrow{p_I} DI)_{I \in \mathbb{I}}$ einen Limes-Kegel für D und schreiben $L = \lim_{\leftarrow \mathbb{I}} D$.

- Ein Kokegel von $A \in \mathcal{C}$ auf D ist (ein Kegel auf $D: \mathbb{I}^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{C}^{\text{op}}$, d.h.) eine “kompatible” Familie $(DI \xrightarrow{q_I} A)_{I \in \mathbb{I}}$ von Morphismen in $\mathcal{C}$. Ein Kolimes für D ist (ein Limes für $D: \mathbb{I}^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{C}^{\text{op}}$, d.h.) ein “universeller” Kokegel auf D :

$$\begin{array}{ccccc} DI & \xleftarrow{q_I} & & & A \\ & \searrow p_I & \nearrow & & \\ & & L & \xleftarrow{-\exists! \bar{q}-} & \\ & \nearrow p_J & \nwarrow & & \\ DJ & \xleftarrow{q_J} & & & \end{array}$$

Bemerkung 7.2. i) Besitzt ein Diagramm einen (Ko-)Limes, dann ist dieser eindeutig bis auf kanonische Isomorphie — Beweis wie in Beispiel 4.1.

ii) Salopp: Der (Ko-)Limes ist der (Ko-)Kegel, der am Diagramm am nächsten dran ist.

iii) Ist L ein Limes bzw. Kolimes von $D: \mathbb{I} \rightarrow \mathcal{C}$, so gilt für jedes $A \in \mathcal{C}$:

$$\begin{aligned} \text{Hom}(A, L) &\cong \{\text{Kegel von } A \text{ auf } D\} \\ \text{bzw. } \text{Hom}(L, A) &\cong \{\text{Ko-Kegel von } A \text{ auf } D\}. \end{aligned}$$

Sehen später: die rechte Seite ist ein Funktor bzgl. A und L ist dessen Darstellung.

Wir betrachten nun (Ko)Limites für Diagramme $D: \mathbb{I} \rightarrow \mathcal{C}$ für spezielle Kategorien $\mathbb{I}$:

Terminale/initiale Objekte Sei $\text{Ob}(\mathbb{I}) = \emptyset$. Dann gibt es (per sinnvoller Konvention) genau ein Diagramm über $\mathbb{I}$.

- Ein Limes ist dann ein *terminales Objekt in $\mathcal{C}$* : ein $L \in \mathcal{C}$ mit $\text{Hom}(A, L) = 1$ für alle $A \in \mathcal{C}$.

Z.B. sind terminale Objekte in

- (Set), (Top) jede ein-elementige Menge,
- (Ab), (Group) die triviale Gruppe,
- der Kategorie unitaler Ringe mit $1 \neq 0$ nicht existent.

- Ein Kolimes ist dann ein *initiales Objekt in $\mathcal{C}$* : ein $L \in \mathcal{C}$ mit $\text{Hom}(L, A) = 1$ für alle $A \in \mathcal{C}$.

Z.B. sind initiale Objekte in

- (Set), (Top) die leere Menge,
- (Ab), (Group) die triviale Gruppe,
- der Kategorie unitaler Ringe mit $1 \neq 0$ nicht existent.

Produkte/Koprodukte Sei $\mathbb{I}$ *diskret* (die einzigen Morphismen sind die Identitäten der Objekte). Ein Diagramm ist dann eine Familie $(D_I)_{I \in \mathbb{I}}$ von Objekten in $\mathcal{C}$.

- Ein Kegel ist ein $A \in \mathcal{C}$ mit einem Morphismus $q_I: A \rightarrow D_I$ für jedes $I \in \mathbb{I}$. Ist $(L \xrightarrow{p_I} D_I)_{I \in \mathbb{I}}$ ein Limes, so schreiben $L = \prod_{I \in \mathbb{I}} D_I$ und nennen L das *Produkt* von $(D_I)_{I \in \mathbb{I}}$ und $(p_I)_{I \in \mathbb{I}}$ die *Projektionen*.

Z.B. sind Produkte

- in $\mathcal{C} = (\text{Set}), (\text{Group}), (\text{Vect}_{\mathbb{K}}), (\text{Top}), \dots$ die bekannten Konstruktionen,

- in $(C^*\text{-Alg}_1)$ das l^∞ -Produkt.
- Ein Kokegel ist ein $A \in \mathcal{C}$ mit einem Morphismus $q_I: D_I \rightarrow A$ für jedes $I \in \mathbb{I}$.
Ist $(D_I \xrightarrow{p_I} L)_{I \in \mathbb{I}}$ ein Kolimes, so schreiben wir $L = \bigsqcup_{I \in \mathbb{I}} D_I$ und nennen L das *Koprodukt* von $(D_I)_{I \in \mathbb{I}}$.
Z.B. sind Koprodukte
 - in $(\text{Set}), (\text{Top})$ disjunkte Vereinigungen;
 - in $(\text{Ab}), (\text{Vect}_{\mathbb{K}})$ die direkte Summe, die im endlichen Fall $(|\text{Ob}(\mathbb{I})| < \infty)$ mit dem Produkt übereinstimmt;
 - in (cRing) (kommutative Ringe) das Tensorprodukt über $\mathbb{Z}$: $R_1 \sqcup R_2 = R_1 \otimes_{\mathbb{Z}} R_2$; die Abbildung $R_{1,2} \xrightarrow{p_{1,2}} R_1 \sqcup R_2$ liefert eine bilineare Abbildung $R_1 \times R_2 \rightarrow R_1 \sqcup R_2, x \otimes y \mapsto p_1(x)p_2(y) = p_2(y)p_1(x)$;
 - in (Group) das “freie Produkt”, z.B. ist $\bigsqcup_{I \in \mathbb{I}} \mathbb{Z}$ die freie Gruppe auf $\text{Ob}(\mathbb{I})$.

Falls $\text{Ob}(\mathbb{I}) = \{1, 2\}$, schreiben wir für das Produkt $D_1 \times D_2$ und das Koprodukt $D_1 \sqcup D_2$.

Pullbacks/Pushouts

- Sei $\mathbb{I}$ von der Form



Ein Diagramm besteht dann aus Objekten und Morphismen

$$\begin{array}{ccc} & D_2 & \\ & \downarrow f_2 & \\ D_1 & \xrightarrow{f_1} & D_3 \end{array}$$

Ein Limes ist eine Ergänzung zu einem kommutativen Diagramm

$$\begin{array}{ccc} L & \xrightarrow{p_2} & D_2 \\ p_1 \downarrow & & \downarrow f_2 \\ D_1 & \xrightarrow{f_1} & D_3 \end{array} \quad (\text{mit } f_2 p_2 = f_1 p_1 (= p_3)) \quad (10)$$

mit einer Faktorisierungseigenschaft

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{q_2} & D_2 \\ \downarrow q_1 & \searrow \exists! \tilde{q} & \downarrow p_2 \\ & L & \xrightarrow{p_2} D_2 \\ & \downarrow p_1 & \downarrow f_2 \\ & D_1 & \xrightarrow{f_1} D_3 \end{array} \quad (\text{mit } f_2 p_2 = f_1 p_1 (= p_3)).$$

Wir nennen (10) ein *Pullback-Diagramm*.

- Sei $\mathbb{I}$ von der Form $\begin{array}{c} \bullet > \bullet \\ \downarrow \\ \bullet \end{array}$.

Ein Diagramm besteht dann aus Objekten und Morphismen

$$\begin{array}{ccc} D_3 & \xrightarrow{f_2} & D_2 \\ f_1 \downarrow & & \\ D_1 & & \end{array}$$

Ein Kolimes ist eine Ergänzung zu einem kommutativen Diagramm

$$\begin{array}{ccc} D_3 & \xrightarrow{f_2} & D_2 \\ f_1 \downarrow & & \downarrow p_2 \\ D_1 & \xrightarrow{p_1} & L \end{array} \quad (\text{mit } p_2 f_2 = p_1 f_1 (= p_3)) \quad (11)$$

mit einer Faktorisierungseigenschaft — ein *Pushout-Diagramm*.

Equalizer/Koequalizer Sei $\mathbb{I}$ eine Kategorie der Form $\bullet \rightrightarrows \bullet$. Ein Diagramm ist dann ein Paar paralleler Morphismen $D_1 \begin{smallmatrix} f \\ \rightrightarrows \\ g \end{smallmatrix} D_2$.

- Ein Limes ist ein “universelles” Objekt L mit einem Morphismus $L \xrightarrow{p} D_1$ mit $f \circ p = g \circ p$ und wird *Equalizer* genannt.

Z.B. ist

- ein Equalizer im Fall $\mathcal{C} = (\text{Set})$ die Einbettung $\{d \in D_1 : f(d_1) = g(d_1)\} \hookrightarrow D_1$;
- der Kern einer Abbildung $V \xrightarrow{f} W$ in $(\text{Vect}_{\mathbb{K}})$ ein Equalizer für $V \begin{smallmatrix} f \\ \rightrightarrows \\ 0 \end{smallmatrix} W$.

- Ein Kolimes ist ein “universelles” Objekt L mit einem Morphismus $D_2 \xrightarrow{p} L$ mit $p \circ f = p \circ g$ und wird *Koequalizer* genannt.

Z.B. ist der Kokern $W/f(V)$ für eine Abbildung $V \xrightarrow{f} W$ in $(\text{Vect}_{\mathbb{K}})$ ein Koequalizer für $V \begin{smallmatrix} f \\ \rightrightarrows \\ 0 \end{smallmatrix} V$.

Frage Wie bildet man Limes in (Set) ?

Idee Sei $D: \mathbb{I} \rightarrow (\text{Set})$ ein Diagramm mit Limes $(L \xrightarrow{p_I} DI)_{I \in \mathbb{I}}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} L &\equiv \text{Hom}(\{1\}, L) \equiv \{\text{Kegel}(\{1\} \xrightarrow{p_I} DI)_{I \in \mathbb{I}}\} \\ &\equiv \{\underbrace{(p_I(1))}_{=: \tilde{p}_I} \in DI)_{I \in \mathbb{I}} : \underbrace{\text{für alle } I \xrightarrow{k} J \text{ in } \mathbb{I} \text{ gilt } \tilde{p}_I \xrightarrow{Dk} \tilde{p}_J}_{(*)}\}. \end{aligned}$$

Wir sehen später: ähnlich werden Limites in $(\text{Group}), (\text{Ab}), (\text{Ring}), (\text{Vect}_{\mathbb{K}}), \dots$ (Kategorien algebraischer Objekte) gebildet.

Lemma 7.3. Ein Limes für ein Diagramm $D: \mathbb{I} \rightarrow (\text{Set})$ ist

$$L := \left\{ (\tilde{p}_I)_I \in \prod_{I \in \mathbb{I}} DI : \text{es gilt } (*) \right\}$$

zusammen mit den natürlichen Projektionen $(L \xrightarrow{p_I} DI)_{I \in \mathbb{I}}$.

Beweis. Sei $(A \xrightarrow{q_I} DI)_{I \in \mathbb{I}}$ ein Kegel auf D . Zu zeigen: Es gibt genau ein $\bar{q}: A \rightarrow L$ mit

$$p_I \circ \bar{q} = q_I \text{ für alle } I \in \mathbb{I}. \quad (12)$$

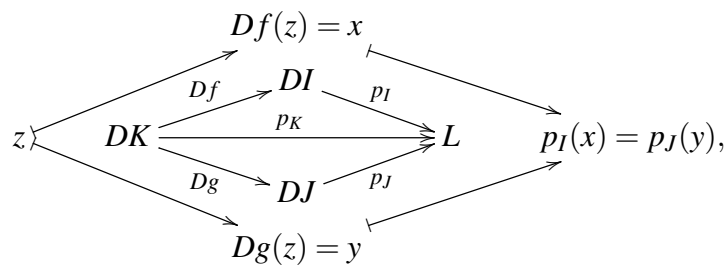
Eindeutigkeit: Aus (12) folgt $\bar{q}(a) = (q_I(a))_I$ für alle $a \in A$.

Existenz: $(\tilde{p}_I)_I := (q_I(a))_I$ erfüllt $(*)$, weil $(A \xrightarrow{q_I} DI)_I$ ein Kegel ist: $(Dk)(q_I(a)) = q_J(a)$ für alle $I \xrightarrow{k} J$ in $\mathbb{I}$. $\square$

Frage Wie bildet man Kolimites in (Set) ?

Idee Sei $D: \mathbb{I} \rightarrow (\text{Set})$ ein Diagramm mit Kolimes $(DI \xrightarrow{p_I} L)_{I \in \mathbb{I}}$. Dann gilt

- $p_I(DI) \subseteq L$ für jedes $I \in \mathbb{I}$ bzw. $\bigsqcup_{I \in \mathbb{I}} DI \xrightarrow{\bigsqcup p_I} L$;
- für jedes Diagramm $I \xleftarrow{f} K \xrightarrow{g} J$ kommutiert



Lemma 7.4. Ein Kolimes für $D: \mathbb{I} \rightarrow (\text{Set})$ ist

$$L := \left(\bigsqcup_{I \in \mathbb{I}} DI \right) / \sim$$

zusammen mit den natürlichen Abbildungen $(DI \xrightarrow{p_I} L)_{I \in \mathbb{I}}$, wobei

mit $DI \ni x \sim y \in DJ$

$$\begin{array}{ccccccc}
 :\Leftrightarrow \exists I = I_1 & & J_1 = I_2 & & J_2 = I_3 & & \dots & & J_n = J \\
 & \nwarrow g_1 & \nearrow f_1 & \nwarrow g_2 & \nearrow f_2 & & \dots & & \nearrow f_n \\
 & & K_1 & & K_2 & & \dots & & K_n \\
 \\
 x = x_1 & & y_1 = x_2 & & \dots & & \dots & & y_n = y \\
 & \nwarrow Dg_1 & \nearrow Df_1 & & & & & & \nearrow Df_n \\
 & & z_1 \in DK_1 & & & & & & z_n \in DK_n
 \end{array}$$

Beweis. Analog zu Lemma 7.3. □

Nützliche Sprechweise:

Definition 7.5. Wir sagen, eine Kategorie $\mathcal{C}$

- hat (endliche) Limites/Kolimites [der Form $\mathbb{I}$] $\Leftrightarrow$ jedes Diagramm $D: \mathbb{I} \rightarrow \mathcal{C}$ (mit $|\text{Ob}(\mathbb{I})| < \infty$) hat einen Limes/Kolimes;
- hat (endliche) Produkte/Koprodukte/Equalizer/Koequalizer/..., wenn sie (endliche) Limites/Kolimites der entsprechenden Form hat;
- ist (ko-)vollständig, falls sie Limites/Kolimites hat.

Proposition 7.6. i) Hat $\mathcal{C}$ alle (endlichen) Produkte und Equalizer, so hat $\mathcal{C}$ alle (endlichen) Limites.

ii) Hat $\mathcal{C}$ alle (endlichen) Koprodukte und Koequalizer, so hat $\mathcal{C}$ alle (endlichen) Kolimites.

Beweis. i) Sei $\mathbb{I}$ eine kleine Kategorie und $D: \mathbb{I} \rightarrow \mathcal{C}$ ein Diagramm. Definiere Morphismen

$$\prod_I DI \xrightarrow[r]{s} \prod_{I \xrightarrow{k} J} DJ \tag{13}$$

so, dass für jeden Morphismus $I \xrightarrow{k} J$ in $\mathbb{I}$ gilt:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & DJ & & \\
 & \nearrow p_J & \circlearrowleft & \searrow 1_{DJ} & \\
 \prod_{I'} DI' & \xrightarrow[r]{s} & \prod_{I' \xrightarrow{k'} J'} DJ' & \xrightarrow{p_k} & DJ \\
 & \searrow p_I & \circlearrowleft & \nearrow Dk & \\
 & & DI & &
 \end{array}$$

Dann gilt für jedes Objekt $A \in \mathcal{C}$:

$$\begin{aligned} \{\text{Kegel von } A \text{ auf (13)}\} &\equiv \left\{ \underbrace{\text{Morphismus } A \xrightarrow{\bar{q}} \prod_I DI}_{= \text{Familie } (A \xrightarrow{q_I} DI)_I} \text{ mit } \underbrace{r \circ \bar{q} = s \circ \bar{q}}_{q_J = Dk \circ q_I \text{ für alle } I \xrightarrow{k} J} \right\} \\ &\equiv \{\text{Kegel von } A \text{ auf } D\} \end{aligned}$$

und somit ist ein Equalizer für r, s , also ein Limes für (13), dasselbe wie ein Limes für D .

ii) Analog. □

7.2 (Ko-)Limites als Darstellungen von Funktoren

Sei $\mathbb{I}$ eine kleine Kategorie. Definiere für jedes $A \in \mathcal{C}$ ein “konstantes Diagramm”/einen “Diagonalfunktor”:

$$\Delta A: \mathbb{I} \rightarrow \mathcal{C}, \quad \begin{cases} I \mapsto A, \\ (I \xrightarrow{k} J) \mapsto (A \xrightarrow{1_A} A). \end{cases}$$

Dann gilt für jedes Diagramm $D: \mathbb{I} \rightarrow \mathcal{C}$:

$$\begin{aligned} &\left\{ \text{natürliche Transformationen } \mathbb{I} \begin{array}{c} \xrightarrow{\Delta A} \\ \Downarrow q \\ \xrightarrow{D} \end{array} \mathcal{C} \right\} \\ &= \left\{ \text{Familien } (q_I: \Delta A(I) = A \rightarrow DI)_{I \in \mathbb{I}} \text{ s.d. (*) für jedes } I \xrightarrow{k} J \text{ in } \mathbb{I} \text{ kommutiert} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccc} \Delta A(I) = A & \xrightarrow{\Delta A(k) = 1_A} & A = \Delta A(J) \\ q_I \downarrow & & \downarrow q_J \\ DI & \xrightarrow{Dk} & DJ \end{array} \quad (*)$$

$$= \left\{ \text{Kegel } (A \xrightarrow{q_I} DI)_{I \in \mathbb{I}} \right\}$$

und analog

$$\left\{ \text{natürliche Transformationen } \mathbb{I} \begin{array}{c} \xrightarrow{D} \\ \Downarrow q \\ \xrightarrow{\Delta A} \end{array} \mathcal{C} \right\} = \left\{ \text{Kokegel } (DI \xrightarrow{q_I} A)_{I \in \mathbb{I}} \right\}.$$

Jeder Morphismus $A \xrightarrow{f} B$ in $\mathcal{C}$ liefert eine triviale natürliche Transformation

$$\Delta f: \Delta A \rightarrow \Delta B, \quad (\Delta f)_I: (\Delta A)(I) = A \xrightarrow{f} B = (\Delta B)(I) \text{ für alle } I \in \mathbb{I}.$$

Wir erhalten also einen Funktor

$$\Delta: \mathcal{C} \rightarrow [\mathbb{I}, \mathcal{C}], \quad \begin{cases} A \mapsto \Delta A, \\ (A \xrightarrow{f} B) \mapsto (\Delta A \xrightarrow{\Delta f} \Delta B). \end{cases}$$

Proposition 7.7. i) Ein Limes für $D: \mathbb{I} \rightarrow \mathcal{C}$ ist dasselbe wie eine Darstellung für den Funktor $H_D \circ \Delta = \text{Hom}_{[\mathbb{I}, \mathcal{C}]}(\Delta -, D): \mathcal{C} \rightarrow (\text{Set})$.

ii) Ein Kolimes für $D: \mathbb{I} \rightarrow \mathcal{C}$ ist dasselbe wie eine Darstellung für den Funktor $H^D \circ \Delta: \mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow (\text{Set})$.

Ende d. Vorlesung
vom 30.11.

Beweis. i) Yoneda-Lemma (Bemerkung 5.7) $\Rightarrow$ eine Darstellung für $F := H_D \circ \Delta$ ist

$$\text{ein } L \in \mathcal{C} \text{ mit einem } p \in FL = \text{Hom}(\Delta L, D) = \{\text{Kegel von } L \text{ auf } D\}$$

so, dass für jedes $A \in \mathcal{C}$ folgende Abbildung eine Bijektion ist:

$$\text{Hom}(A, L) \rightarrow FA = \text{Hom}(\Delta A, D) = \{\text{Kegel von } A \text{ auf } D\},$$

$$\bar{q} \mapsto F(\bar{q})(p) = H_D(\Delta(\bar{q}))(p) = \left(\Delta A \xrightarrow{\Delta \bar{q}} \Delta L \xrightarrow{p} D \right).$$

Das ist aber genau die Definition eines Limes für D .

ii) Analog. □

Wie verhalten sich Limites bei Änderungen des Diagramms D ?

Jede natürliche Transformation $\mathbb{I} \begin{array}{c} \xrightarrow{D} \\ \Downarrow \alpha \\ \xrightarrow{D'} \end{array} \mathcal{C}$ liefert

- für jeden Kegel auf D einen Kegel auf D' ;
- einen Morphismus der Limites, falls diese existieren:

$$\begin{array}{ccccc} \Delta A & & & & \\ & \searrow \bar{q} & & \searrow q & \\ & & \Delta(\lim D) & \xrightarrow{\quad} & D \\ & \searrow \Delta \bar{\alpha} \circ q & \downarrow \Delta \lim \alpha & & \downarrow \alpha \\ & & \Delta(\lim D') & \xrightarrow{\quad} & D' \end{array}$$

$\leftarrow \mathbb{I}$ (unter $\Delta(\lim D)$ und $\Delta(\lim D')$)

Hat $\mathcal{C}$ alle Limites der Form $\mathbb{I}$, so erhalten wir einen Funktor $\lim_{\leftarrow \mathbb{I}} : [\mathbb{I}, \mathcal{C}] \rightarrow \mathcal{C}$:

Folgerung 7.8. i) Ist $\mathbb{I}$ eine kleine Kategorie und hat $\mathcal{C}$ alle Limites der Form $\mathbb{I}$, so

gibt es eine Adjunktion $\mathcal{C} \xrightleftharpoons[\lim_{\leftarrow \mathbb{I}}]{\Delta} [\mathbb{I}, \mathcal{C}]$:

$$\mathrm{Hom}_{[\mathcal{C}, \mathbb{I}]}(\Delta A, D) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, \lim_{\leftarrow \mathbb{I}} D), \quad (\Delta A \xrightarrow{q} D) \equiv (A \xrightarrow{\bar{q}} \lim_{\leftarrow \mathbb{I}} D).$$

ii) Ist $\mathbb{I}$ eine kleine Kategorie und hat $\mathcal{C}$ alle Kolimites der Form $\mathbb{I}$, so gibt es eine

Adjunktion $[\mathbb{I}, \mathcal{C}] \xrightleftharpoons[\Delta]{\lim_{\rightarrow \mathbb{I}}} \mathcal{C}$.

Beweis. Folgt aus Proposition 7.7 und 6.3. □

7.3 Stetigkeit und Kostetigkeit von Funktoren

Wie verhalten sich Limites bei Änderungen der Kategorie $\mathcal{C}$?

Jeder Funktor $F : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$ liefert

- für jedes Diagramm $\mathbb{I} \xrightarrow{D} \mathcal{B}$ ein Diagramm $\mathbb{I} \xrightarrow{D} \mathcal{B} \xrightarrow{F} \mathcal{C}$;

- für jeden Kegel $\mathbb{I} \xrightarrow[\Delta]{\Delta A} \mathcal{B}$ einen Kegel $\mathbb{I} \xrightarrow[\Delta]{\Delta A} \mathcal{B} \xrightarrow[F \circ D]{F \circ (\Delta A) = \Delta(FA)} \mathcal{C}$.

Definition 7.9. Ein Funktor $F : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$

- bewahrt Limites (der Form $\mathbb{I}$), falls für jedes Diagramm $\mathbb{I} \xrightarrow{D} \mathcal{B}$ und jeden Limes $\Delta L \xrightarrow{p} D$ der Kegel $\Delta FL \xrightarrow{Fp} FD$ ein Limes ist;
- ist stetig, falls F Limites bewahrt.

Analog definieren wir “ F bewahrt Kolimites” und “ F ist kostetig”.

Beispiele 7.10. i) Bewahren

$$(\mathrm{Set}) \xrightleftharpoons[|\cdot|]{\langle \cdot \rangle} (\mathrm{Group}).$$

(Ko-)Produkte? Für alle Gruppen G, H gilt i.A.

- $|G \times H| = |G| \times |H|$, und $|\cdot|$ bewahrt alle Produkte;

- $\underbrace{|G \sqcup H|}_{\text{freies Produkt}} \not\cong |G| \sqcup |H|$, also bewahrt $|\cdot|$ nicht Koprodukte.

Für alle Mengen X, Y gilt i.A.

- $\langle X \sqcup Y \rangle = \langle X \rangle \sqcup \langle Y \rangle$, und $\langle \cdot \rangle$ bewahrt alle Koprodukte;
- $\langle X \times Y \rangle \not\cong \langle X \rangle \times \langle Y \rangle$, z.B. gilt im Fall $|X| = 1 = |Y|$

$$\mathbb{Z} \cong \langle X \times Y \rangle \not\cong \langle X \rangle \times \langle Y \rangle \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z};$$

also bewahrt $\langle \cdot \rangle$ nicht Produkte.

ii) Bewahren

$$(\text{Top}) \begin{array}{c} \xrightarrow{\text{Stone-}\check{\text{C}}\text{ech-Kompakt.}} \\ X \mapsto \hat{X} \\ \xleftarrow{\text{Inklusion } \iota} \end{array} \left(\begin{array}{c} \text{kompakte} \\ \text{Hausdorff-} \\ \text{Räume} \end{array} \right)$$

(Ko-)Produkte? Sehen später: $\hat{\cdot}$ ist kostetig, ι ist stetig.

- ι bewahrt keine Koprodukte:
Sei $(X_i)_i$ eine unendliche Familie kompakter Hausdorff-Räume.
 $\bigsqcup_i \iota(X_i)$ ist die disjunkte Vereinigung, nicht kompakt!
 $\bigsqcup_i X_i$ ist gerade $\widehat{\bigsqcup_i \iota(X_i)}$ (ÜA).
- $\hat{\cdot}$ bewahrt keine Produkte; z.B. $\widehat{\hat{\mathbb{N}} \times \hat{\mathbb{N}}} \not\cong \widehat{\mathbb{N} \times \mathbb{N}}$.
Für jeden diskreten Raum X ist $C(\hat{X}) \cong l^\infty(X)$, also

$$C(\widehat{\hat{\mathbb{N}} \times \hat{\mathbb{N}}}) \cong C(\hat{\mathbb{N}}) \otimes_{C^*} C(\hat{\mathbb{N}}) \cong l^\infty(\mathbb{N}) \otimes_{C^*} l^\infty(\mathbb{N}) \subsetneq l^\infty(\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \cong C(\widehat{\mathbb{N} \times \mathbb{N}})$$

(z.B. liegt $\delta: (x, y) \mapsto \delta_{x, y}$ in $l^\infty(\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \setminus l^\infty(\mathbb{N}) \otimes_{C^*} l^\infty(\mathbb{N})$).

Lemma 7.11. Sei $\mathcal{B}$ vollständig. Dann sind für jedes $F: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$ äquivalent:

- F bewahrt Equalizer und Produkte;
- F ist stetig;
- F bewahrt terminale Objekte und Pull-backs für Familien (=Limites für Diagramme auf einer kleinen Kategorie der Form $\cdots \begin{array}{ccc} \bullet & & \bullet \\ & \searrow & \swarrow \\ & \bullet & \end{array} \cdots$).

Analoge charakterisiert man Kostetigkeit.

Beweis. i) $\Rightarrow$ ii): Jeder Limes ist ein Equalizer zwischen Produkten (Proposition 7.6).

ii) $\Rightarrow$ iii): Klar.

iii) $\Rightarrow$ i): Sei, $0 \in \mathcal{B}$ terminal. Dann ist

- ein Produkt für $(B_I)_I$ dasselbe wie ein Pull-back für $(BI \rightarrow 0)_I$;
- ein Equalizer für $B \xrightarrow[g]{f} B'$ dasselbe wie ein Pull-back für

$$\begin{array}{ccc} & B & \\ & \downarrow f \times 1_B & \\ B & \xrightarrow[g \times 1_B]{} B' \times B. & \end{array}$$

□

Proposition 7.12. *Jeder darstellbare Funktor $F: \mathcal{B} \rightarrow (\text{Set})$ ist stetig.*

Der Beweis benutzt:

Lemma 7.13. *Für jedes Diagramm $D: \mathbb{I} \rightarrow \mathcal{B}$ und jedes $A \in \mathcal{B}$ gilt*

$$\begin{aligned} \text{Hom}(\Delta A, D) &= \{ \text{Kegel } (A \xrightarrow{q_I} DI)_{I \in \mathbb{I}} \} \\ &= \left\{ (q_I)_I \in \prod_{I \in \mathbb{I}} \underbrace{\text{Hom}(A, DI)}_{=(H^A \circ D)(I)} : \text{für jedes } I \xrightarrow{k} J \text{ in } \mathbb{I} \text{ gilt } \underbrace{(Dk)q_I}_{=(H^A \circ D)(k)} = q_J \right\} \\ &\stackrel{\text{Lemma 7.3}}{=} \lim_{\leftarrow \mathbb{I}} (H^A \circ D). \end{aligned}$$

□

Beweis von Proposition 7.12. Sei $D: \mathbb{I} \rightarrow \mathcal{B}$ ein Diagramm mit Limes $\Delta L \xrightarrow{p} D$ und sei $A \in \mathcal{C}$.

Ist $F = H^A$, so erhalten wir einen Isomorphismus

$$\begin{array}{ccc} H^A(L) = \text{Hom}(A, L) & \xrightarrow[\bar{q} \mapsto p_I \circ \bar{q}]{H^A p_I} & H^A DI = \text{Hom}(A, DI) \\ \bar{q} \mapsto (p_I \circ \bar{q})_I \downarrow \cong & & \vdots \\ \text{Hom}(\Delta A, D) & & \\ \parallel & & \\ \lim_{\leftarrow \mathbb{I}} H^A D & \xrightarrow[(p_{I'} \circ \bar{q})_{I'} \mapsto p_I \circ \bar{q}]{} & H^A DI = \text{Hom}(A, DI). \end{array}$$

Ist $F \xrightarrow[\phi]{\cong} H^A$, so erhalten wir

$$\begin{array}{ccc} \Delta(FL) & \xrightarrow{Fp} & FD \\ \Delta\phi_L \downarrow \cong & & \cong \downarrow \phi_D \\ \Delta(H^A L) & \xrightarrow{H^A p} & H^A D. \end{array}$$

Weil $H^A p$ ein Limes ist und $\Delta\phi_L, \phi_D$ Isomorphismen sind, muss Fp ein Limes sein. $\square$

Ende d. Vorlesung
vom 07.12.11

Bemerkung 7.14. i) Ersetzt man $\mathcal{B}$ durch $\mathcal{B}^{\text{op}}$, so erhält man: für jedes $A \in \mathcal{B}$ ist $H_A: \mathcal{B}^{\text{op}} \rightarrow (\text{Set})$ stetig.

ii) Für jedes Diagramm $D: \mathbb{I} \rightarrow \mathcal{B}$ mit einem Limes und jedes $A \in \mathcal{B}$ gilt also

$$\text{Hom}_{\mathcal{B}}(A, \lim_{\rightarrow \mathbb{I}} D) \cong \lim_{\leftarrow \mathbb{I}} \text{Hom}_{\mathcal{B}}(A, D-).$$

Fassen wir D als Diagramm $\mathbb{I}^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{B}^{\text{op}}$ auf, erhalten wir $\lim_{\rightarrow \mathbb{I}} D = \lim_{\leftarrow \mathbb{I}^{\text{op}}} D$ und

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\mathcal{B}}(\lim_{\rightarrow \mathbb{I}} D, A) &= \text{Hom}_{\mathcal{B}^{\text{op}}}(A, \lim_{\leftarrow \mathbb{I}^{\text{op}}} D) \\ &\cong \lim_{\leftarrow \mathbb{I}^{\text{op}}} \text{Hom}_{\mathcal{B}^{\text{op}}}(A, D-) = \lim_{\leftarrow \mathbb{I}^{\text{op}}} \text{Hom}_{\mathcal{B}}(D-, A). \end{aligned}$$

iii) Im Allgemeinen sind darstellbare Funktoren nicht kostetig.

Beispiel: Hat $\mathcal{B}$ ein initiales Objekt 1 , dann ist $H^1(1) = \text{Hom}(1, 1) = H_1(1)$ nicht initial in (Set) , weil $|\text{Hom}(1, 1)| = 1 \neq 0$.

Proposition 7.15. Hat $F: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$ ein Rechts-/Links-Adjungiertes, so ist F kostetig/stetig.

Beweis. Sei $\mathcal{B} \xrightleftharpoons[\underset{G}{\perp}]{\underset{F}{\perp}} \mathcal{C}$ eine Adjunktion. Sei $D: \mathbb{I} \rightarrow \mathcal{B}$ ein Diagramm mit Kolimes

$D \xrightarrow{p} \Delta L$ und sei $C \in \mathcal{C}$. Dann liefern die Bijektionen

$$\text{Hom}(FB, C) \cong \text{Hom}(B, GC) \text{ natürlich bzgl. } B \in \mathcal{B}$$

Bijektionen

$$\begin{aligned} \{\text{Kokegel}(FDI \xrightarrow{q_I} C)_I\} &\cong \{\text{Kokegel}(DI \xrightarrow{q_I} GC)_I\} \\ &= \{\text{Kokegel}(DI \xrightarrow{p_I} L \rightarrow GC)_I\} \\ &\cong \{\text{Kokegel}(FDI \xrightarrow{Fp_I} FL \rightarrow C)_I\}. \end{aligned}$$

Somit ist $(FDI \xrightarrow{Fp_I} FL)_I$ ein Kolimes für FD . $\square$

Beispiel 7.16. i) Der Vergiss-Funktor $(\text{Top}) \rightarrow (\text{Set})$ hat ein Links- und ein Rechts-Adjungiertes und ist somit stetig und kostetig.

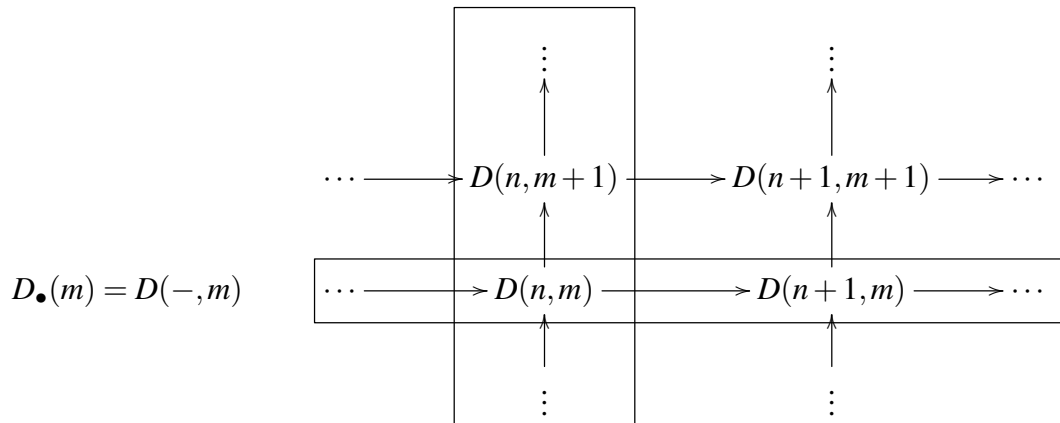
ii) In

$$(\text{Set}) \begin{array}{c} \xrightarrow{\langle \cdot \rangle} \\ \xleftarrow{|\cdot|} \end{array} (\text{Group}).$$

ist $|\cdot|$ nicht kostetig, $\langle \cdot \rangle$ nicht stetig $\Rightarrow |\cdot|$ hat kein Rechts-Adjungiertes, $\langle \cdot \rangle$ kein Links-Adjungiertes.

7.4 (Ko-)Limites in Kategorien von Funktoren

Seien $\mathbb{I}, \mathbb{J}$ kleine und $\mathcal{C}$ eine beliebige Kategorie und sei $D: \mathbb{I} \times \mathbb{J} \rightarrow \mathcal{C}$ ein Diagramm.
Beispiel $\mathbb{I} = \mathbb{J} = \mathbb{N}$ (als Ordnung):



$$D(n, -) = D^\bullet(n)$$

Wir präzisieren in diesem Abschnitt folgende Ideen:

(L1) Wie berechnet man $\lim_{\leftarrow (\mathbb{I} \times \mathbb{J})} D$? Schrittweise:

- bestimme für jedes $I \in \mathbb{I}$ den Limes $LI \cong \lim_{\leftarrow \mathbb{J}} D(I, -)$;
erhalten $\mathbb{I} \xrightarrow{L} \mathcal{C}$ und $\lim_{\leftarrow \mathbb{I} \times \mathbb{J}} D \cong \lim_{\leftarrow \mathbb{I}} L$; oder
- bestimme für jedes $J \in \mathbb{J}$ den Limes $L'J = \lim_{\leftarrow \mathbb{I}} D(-, J)$;
erhalten $\mathbb{J} \xrightarrow{L'} \mathcal{C}$ und $\lim_{\leftarrow \mathbb{I} \times \mathbb{J}} D \cong \lim_{\leftarrow \mathbb{J}} L'$.

(L2) Wir können D auffassen als Diagramm

$$\mathbb{I} \xrightarrow{D^\bullet} [\mathbb{J}, \mathcal{C}], I \mapsto D(I, -), \quad \text{oder} \quad \mathbb{J} \xrightarrow{D_\bullet} [\mathbb{I}, \mathcal{C}], J \mapsto D(-, J),$$

und dann gilt $L' \cong \lim_{\leftarrow \mathbb{I}} D^\bullet$ und $L \cong \lim_{\leftarrow \mathbb{J}} D_\bullet$.

(L3) Zusammengefasst: “Limites kann man vertauschen”:

$$\lim_{\leftarrow \mathbb{J}} \lim_{\leftarrow \mathbb{I}} D^\bullet \cong \lim_{\leftarrow \mathbb{J}} L' \cong \lim_{\leftarrow (\mathbb{I} \times \mathbb{J})} D \cong \lim_{\leftarrow \mathbb{I}} L \cong \lim_{\leftarrow \mathbb{I}} \lim_{\leftarrow \mathbb{J}} D_\bullet.$$

Wir präzisieren zuerst **(L2)**. Sei $\mathbb{I} \xrightarrow{D^\bullet} [\mathbb{J}, \mathcal{C}]$ ein Diagramm und $\mathbb{J}$ beliebig (nicht notwendig klein).

Lemma 7.17. Für jedes $J \in \mathbb{J}$ habe $D(-, J)$ einen Limes $(LJ \xrightarrow{p_{I,J}} D(I, J))_{I \in \mathbb{I}}$.

i) Für jeden Morphismus $J \xrightarrow{f} J'$ in $\mathbb{J}$ gibt es genau einen Morphismus $LJ \xrightarrow{L_f} LJ'$ mit

$$\begin{array}{ccc} \Delta(LJ) & \xrightarrow{p_{-,J}} & D(-, J) \\ \Delta(Lf) \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow D(-, g) \\ \Delta(LJ') & \xrightarrow{p_{-,J'}} & D(-, J') \end{array} \quad (14)$$

und wir erhalten einen Funktor $\mathbb{J} \xrightarrow{L} \mathcal{C}$.

ii) Die Familie $(L \xrightarrow{p_{I,-}} D(I, -) = D^\bullet I)_{I \in \mathbb{I}}$ ist ein Limes für $D^\bullet$.

Beweis. i) Siehe §7.2.

ii) Jedes $p_{I,-}$ ist eine natürliche Transformation wegen (14), und $(p_{I,-})_I$ erfüllen die Kegelbedingung, weil $(p_{I,J})_I$ das nach Annahme für jedes J tut.

Wir prüfen die Limes-Bedingung: Sei $(F \xrightarrow{q_{I,-}} D^\bullet I)_{I \in \mathbb{I}}$ ein Kegel.

- Wir erhalten für jedes $J \in \mathbb{J}$ einen Kegel $(FJ \xrightarrow{q_{I,J}} D(I, J))_{I \in \mathbb{I}}$ und somit genau ein $FJ \xrightarrow{\bar{q}_{-,J}} LJ$ mit $q_{-,J} = p_{-,J} \circ \bar{q}_{-,J}$.
- Die $(\bar{q}_{-,J})_J$ bilden eine natürliche Transformation $F \xrightarrow{\bar{q}} L$, wegen der Eindeutigkeit der Abb. $FJ \rightarrow LJ'$ in (14).

Somit existiert genau ein $F \xrightarrow{\bar{q}} L$ mit $q_{-, -} = p_{-, -} \circ \bar{q}$. □

Proposition 7.18. $\lim_{\leftarrow \mathbb{I}} D^\bullet$ existiert $\Leftrightarrow \lim_{\leftarrow \mathbb{I}} D(-, J)$ existiert für jedes $J \in \mathbb{J}$.

Beweis. $\Leftarrow$ gerade gesehen; $\Rightarrow$ offensichtlich. □

Proposition 7.19. *Ist $\mathcal{C}$ vollständig, so auch $[\mathbb{J}, \mathcal{C}]$.*

Beweis. Folgt sofort; Kurzbeweis: Ist $\mathbb{I} \xrightarrow{D^\bullet} [\mathbb{J}, \mathcal{C}]$ ein Diagramm, dann ist

$$L: \mathbb{J} \xrightarrow{D_\bullet} [\mathbb{I}, \mathcal{C}] \xrightarrow{\lim_{\leftarrow \mathbb{I}}} \mathcal{C}$$

ein Limes für $D^\bullet$, weil für jedes $F \in [\mathbb{J}, \mathcal{C}]$ gilt:

$$\text{Hom}_{[\mathbb{J}, \mathcal{C}]}(F, \lim_{\leftarrow \mathbb{I}} D_\bullet) \stackrel{\text{Folgerung 7.8}}{\cong} \text{Hom}_{[\mathbb{J}, [\mathbb{I}, \mathcal{C}]]}(\Delta \circ F, D_\bullet) \cong \text{Hom}_{[\mathbb{I}, [\mathbb{J}, \mathcal{C}]]}(\Delta(F), D^\bullet). \quad \square$$

Folgerung 7.20. $[\mathbb{J}, (\text{Set})]$ ist für jede Kategorie $\mathbb{J}$ vollständig.

Wir beweisen nun (L1). Sei $\mathbb{J}$ wieder klein.

Proposition 7.21. $\lim_{\leftarrow \mathbb{J}} \lim_{\leftarrow \mathbb{I}} D^\bullet \cong \lim_{\leftarrow \mathbb{I} \times \mathbb{J}} D \cong \lim_{\leftarrow \mathbb{I}} \lim_{\leftarrow \mathbb{J}} D_\bullet$, genauer:

- i) existiert $\lim_{\leftarrow \mathbb{J}} \lim_{\leftarrow \mathbb{I}} D^\bullet$, dann ist das ein Limes für D ;
- ii) existiert $\lim_{\leftarrow \mathbb{I}} \lim_{\leftarrow \mathbb{J}} D_\bullet$, dann ist das ein Limes für D .

Beweis. Zeigen nur i): Für jedes $A \in \mathcal{C}$ gilt

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, \lim_{\leftarrow \mathbb{J}} \lim_{\leftarrow \mathbb{I}} D^\bullet) &\cong \text{Hom}_{[\mathbb{J}, \mathcal{C}]}(\Delta A, \lim_{\leftarrow \mathbb{I}} D^\bullet) \\ &\cong \text{Hom}_{[\mathbb{I}, [\mathbb{J}, \mathcal{C}]]}(\Delta \Delta A, D^\bullet) \cong \text{Hom}_{[\mathbb{I} \times \mathbb{J}, \mathcal{C}]}(\Delta A, D). \end{aligned} \quad \square$$

Wir benutzen nun folgende Sprechweise:

Definition 7.22. Ein Funktor $F: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$

- reflektiert Limites (der Form $\mathbb{I}$) : $\Leftrightarrow$ ist $\mathbb{I} \xrightarrow{D} \mathcal{A}$ ein Diagramm, $\Delta L \xrightarrow{p} D$ ein Kegel und $\Delta FL \xrightarrow{Fp} FD$ ein Limes, dann ist $\Delta L \xrightarrow{p} D$ auch ein Limes;
- erzeugt Limites (der Form $\mathbb{I}$) : $\Leftrightarrow$
 - i) ist $\mathbb{I} \xrightarrow{D} \mathcal{A}$ ein Diagramm und hat FD einen Limes, dann hat FD einen Limes der Form $\Delta FL \xrightarrow{Fp} FD$ für einen Kegel $\Delta L \xrightarrow{p} D$;
 - ii) F reflektiert Limites (insbesondere ist $\Delta L \xrightarrow{p} D$ in i) ein Limes für D).

Analog: F reflektiert/erzeugt Kolimites.

Beispiel 7.23. Der Vergiss-Funktor $(\text{Group}) \xrightarrow{|\cdot|} (\text{Set})$ erzeugt Limites: Sei $\mathbb{I} \xrightarrow{D} (\text{Group})$ ein Diagramm. Dann ist nach Lemma 7.3

$$\lim_{\leftarrow \mathbb{I}} (|\cdot| \circ D) = \left\{ (x_I)_{I \in \mathbb{I}} \in \prod_{I \in \mathbb{I}} |DI| : (Df)(x_I) = x_{I'} \text{ für alle } I \xrightarrow{f} I' \text{ in } \mathbb{I} \right\}$$

bezüglich der komponentenweisen Verknüpfung eine Gruppe — weil Df ein Homomorphismus ist für jedes f — und diese Gruppe ist ein Limes für D .

Allgemein: Jeder Vergiss-Funktor zwischen “Kategorien algebraischer Objekte” (genauer: Kategorien von Algebren für Monaden) erzeugt Limites.

Ende d. Vorlesung
vom 11.01.2012

Bemerkung 7.24. Erzeugt $F: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$ Limites und ist $\mathcal{C}$ vollständig, so ist $\mathcal{B}$ vollständig und F stetig.

Proposition 7.25. Für jede kleine Kategorie $\mathbb{J}$ ist die Yoneda-Einbettung $H_\bullet: \mathbb{J} \rightarrow [\mathbb{J}^{\text{op}}, (\text{Set})]$ stetig.

Beweis. Sei $\mathbb{I} \xrightarrow{D} \mathbb{J}$ ein Diagramm mit Limeskegel $(L \rightarrow DI)_{I \in \mathbb{I}}$. Dann gilt:

$$(H_L \rightarrow H_{DI})_{I \in \mathbb{I}} \text{ ist Limeskegel} \stackrel{7.17}{\Leftrightarrow} \forall J \in \mathbb{J} : \underbrace{(H_L(J) \rightarrow H_{DI}(J))}_{H^J(L)}_{H^J(DI)} \text{ ist Limeskegel.}$$

Nach Proposition 7.12 ist aber jedes H^J stetig. □

Teil III

Kategorien mit Zusatzstruktur

8 Monoidale Kategorien

8.1 Grundbegriffe

Definition 8.1. Eine monoidale Kategorie besteht aus

- i) einer Kategorie $\mathcal{C}$ mit einem Funktor $-\square -: \mathcal{C} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$,
- ii) einem natürlichen Isomorphismus (Assoziativität) $(X \square Y) \square Z \xrightarrow{a_{X,Y,Z}} X \square (Y \square Z)$ für $X, Y, Z \in \mathcal{C}$;
- iii) einem Objekt $I \in \mathcal{C}$ (Tensor-Eins) mit Isomorphismen $I \square X \xrightarrow{l_X} X \xleftarrow{r_X} X \square I$ für $X \in \mathcal{C}$;

so dass für alle $W, X, Y, Z \in \mathcal{C}$ folgende Diagramme kommutieren:

$$\begin{array}{ccc}
 ((W \boxtimes X) \boxtimes Y) \boxtimes Z & \xrightarrow{a_{W,X,Y} \boxtimes 1} & (W \boxtimes (X \boxtimes Y)) \boxtimes Z \\
 \downarrow a_{W \boxtimes X, Y, Z} & & \downarrow a_{W, X \boxtimes Y, Z} \\
 (W \boxtimes X) \boxtimes (Y \boxtimes Z) & & \\
 \downarrow a_{W, X, Y \boxtimes Z} & & \\
 W \boxtimes (X \boxtimes (Y \boxtimes Z)) & \xleftarrow{1 \boxtimes a_{X,Y,Z}} & W \boxtimes ((X \boxtimes Y) \boxtimes Z), \\
 & & \\
 (X \boxtimes I) \boxtimes Y & \xrightarrow{a_{X,I,Y}} & X \boxtimes (I \boxtimes Y) \\
 \searrow r_X \boxtimes 1_Y & & \swarrow 1_X \boxtimes l_Y \\
 & X \boxtimes Y &
 \end{array}$$

Die monoidale Kategorie heißt strikt, falls $a_{X,Y,Z}$, l_X , r_X in ii), iii) jeweils die Identität sind.

Mit etwas Vorsicht kann man annehmen, dass monoidale Kategorien strikt sind.

Theorem. Jede monoidale Kategorie ist als solche äquivalent zu einer strikt monoidalen Kategorie.

Beispiele 8.2. Wichtige Standard-Beispiele für monoidale Kategorien:

- i) (Set) mit $X \boxtimes Y = X \times Y$ und $I = \{\bullet\}$ (bel. einelementige Menge);
analog: (Top), (Group), ($\text{Vect}_{\mathbb{k}}$), (Cat), ...

Allgemein: Hat eine Kategorie $\mathcal{C}$ endliche Produkte, also

- zu je zwei Objekten X, Y ein Produkt $X \times Y$ und
- ein terminales Objekt I ,

so erhält man dadurch auf $\mathcal{C}$ eine monoidale Struktur.

- ii) ($\text{Vect}_{\mathbb{k}}$) mit $V \boxtimes W = V \otimes W$ und $I = \mathbb{k}$;
- iii) Kategorie der Bimoduln über einem Ring R mit $M \boxtimes N = M \otimes_R N$ und $I = R$ (Bimodul via Links- und Rechtsmultiplikation);
- iv) Kategorie der Darstellungen einer Gruppe, siehe Übung;

Weniger offensichtliche Beispiele:

v) (Set) mit $X \sqcup Y = X \sqcup Y$ und $I = \emptyset$;

analog: (Top), (Cat), (Group) mit dem freien Produkt, ...

Allgemein, dual zu i): Hat $\mathcal{C}$ endliche Koprodukte, so erhält man dadurch auf $\mathcal{C}$ eine monoidale Struktur.

vi) $[\mathcal{A}, \mathcal{A}]$ — Endofunktoren einer Kategorie $\mathcal{A}$ — mit $F \sqcup G = F \circ G$ (Komposition von Funktoren) und $\alpha \sqcup \beta = \alpha \bullet \beta$ (horizontale Verknüpfung von Transformationen) sowie $I = 1_{\mathcal{A}}$; wird später wichtig;

vii) $\mathbb{N}$ (mit 0; partielle Ordnung als Kategorie) mit wahlweise $n \sqcup m = \begin{cases} n + m, \\ nm, \\ \max(n, m), \\ \min(n, m). \end{cases}$

Definition 8.3. Seien $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ strikt monoidale Kategorien. Ein Funktor $\mathcal{C} \xrightarrow{F} \mathcal{D}$ ist strikt monoidal : $\Leftrightarrow FX \sqcup FY = F(X \sqcup Y)$ für alle $X, Y \in \mathcal{C}$ und $FI_{\mathcal{C}} = I_{\mathcal{D}}$.

Dieser Begriff hat viele sinnvolle Abschwächungen: statt $FX \sqcup FY = F(X \sqcup Y)$ fordert man z.B. $FX \sqcup FY \cong F(X \sqcup Y)$ oder nur nat. Transformationen $FX \sqcup FY \rightarrow F(X \sqcup Y)$ oder $F(X \sqcup Y) \rightarrow FX \sqcup FY$.

8.2 Monoide

Sei $\mathcal{C}$ eine strikt monoidale Kategorie.

Definition 8.4. Ein Monoid in $\mathcal{C}$ besteht aus einem $M \in \mathcal{C}$ mit Morphismen $M \sqcup M \xrightarrow{\mu} M$ Multiplikation und $I_{\mathcal{C}} \xrightarrow{\eta} M$ (die Eins) so, dass

$$\begin{array}{ccc} M \sqcup M \sqcup M & \xrightarrow{\mu \sqcup 1_M} & M \sqcup M \\ \downarrow 1_M \sqcup \mu & \circlearrowleft & \downarrow \mu \\ M \sqcup M & \xrightarrow{\mu} & M, \end{array} \quad \begin{array}{ccc} I_{\mathcal{C}} \sqcup M & \xrightarrow{l_M} & M, \\ \eta \sqcup 1_M \searrow & \circlearrowleft & \nearrow \mu \\ & M \sqcup M & \end{array} \quad \begin{array}{ccc} M \sqcup I_{\mathcal{C}} & \xrightarrow{r_M} & M. \\ \downarrow 1_M \sqcup \eta & \circlearrowleft & \nearrow \mu \\ & M \sqcup M & \end{array}$$

Morphismen von Monoiden sind in der naheliegenden Weise definiert, und alle Monoide in $\mathcal{C}$ bilden eine Kategorie ($\text{Mon}_{\mathcal{C}}$).

Beispiele 8.5. Was sind Monoide in den Kategorien aus dem vorherigen Beispiel?

i) in (Set) mit $\times$: Monoide;

ii) in (Cat) mit $\times$: strikt monoidale Kategorien, wobei $\mu \equiv - \sqcup -$ und $\eta \equiv (\bullet \rightarrow I_{\mathcal{C}})$;

iii) $(\text{Vect}_{\mathbb{k}})$ mit $\otimes$: $\mathbb{k}$ -Algebren;

8.6. Diese Nummer habe ich in der Vorlesung bei der Nummerierung leider übersprungen.

Beispiele 8.7. Ist $\mathcal{C}$ monoidal, so auch $\mathcal{C}^{\text{op}}$ bezüglich desselben Funktors $-\square-$.

Ein Monoid in $\mathcal{C}^{\text{op}}$ heißt *Komonoid* in $\mathcal{C}$ und ist ein $M \in \mathcal{C}$ mit einer *Komultiplikation* $M \xrightarrow{\Delta} M \square M$ und *Koeins* $M \xrightarrow{\varepsilon} I$, die gewisse Diagramme kommutativ machen.

- i) In $(\text{Set}), (\text{Top}), (\text{Group}), (\text{Cat})$ ist jedes Objekt M ein Komonoid bezüglich der Diagonalabbildung $M \xrightarrow{1_M \times 1_M} M \times M$ und dem eindeutigen Morphismus $M \xrightarrow{\varepsilon} I$ (hier ist I jeweils terminal).
- ii) Ein Komonoid in $(\text{Vect}_{\mathbb{k}})^{\text{op}}$ ist eine *Koalgebra*. Beispiel: Für jede endliche Gruppe G

- $C(G)$ mit $\Delta(\delta_x) = \sum_{x=yx} \delta_y \otimes \delta_x$ und $\varepsilon(\delta_x) = \delta_{x,e}$;
- $\mathbb{C}G$ mit $\Delta(x) = x \otimes x$ und $\varepsilon(x) = 1$ für alle $x \in G$.

Das sind sogar Komonoide in $(\text{Mon}_{(\text{Vect}_{\mathbb{k}})})$, sogenannte *Bialgebren*.

Monoiden können auf anderen Objekten wirken:

Definition 8.8. Sei (M, μ, η) ein Monoid. Eine Wirkung davon auf einem Objekt $X \in \mathcal{C}$ ist ein Morphismus $M \square X \xrightarrow{\alpha} X$, für den gilt:

$$\begin{array}{ccc} M \square M \square X & \xrightarrow{\mu \square 1_X} & M \square X \\ 1_M \square \alpha \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow \alpha \\ M \square X & \xrightarrow{\alpha} & X, \end{array} \quad \begin{array}{ccc} I \square X & \xrightarrow{\quad} & X \\ \eta \square 1_X \searrow & \circlearrowleft & \nearrow \alpha \\ & M \square X & \end{array}$$

Wirkungen von einem Monoid bilden in naheliegenderweise eine Kategorie.

Beispiele 8.9. Was sind Wirkungen von folgenden Monoiden?

- i) Für (A, μ, η) in $(\text{Vect}_{\mathbb{k}})$ mit $\otimes$: Links-Moduln über der Algebra A ;
- ii) Für das Monoid $(\mathbb{N}, +, 0)$ in (Cat) : Sei $\mathcal{C}$ mit $\alpha: \mathbb{N} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ eine Wirkung. Dann erfüllen die Funktoren $\alpha_n := \alpha(n, -): \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ die Gleichung $\alpha_{n+1} = \alpha_1 \circ \alpha_n$, weil

$$\begin{array}{ccc} (1, n, X) & \xrightarrow{\mu \times 1_{\mathcal{C}}} & (n+1, X) \\ \downarrow 1 \times \alpha & & \downarrow \alpha \\ (1, \alpha(n, X)) & \xrightarrow{\alpha} & X \end{array}$$

für jedes $X \in \mathcal{C}$ kommutiert; also $\alpha(n, -) = (\alpha_1)^n(X)$.

Eine Wirkung von $\mathbb{N}$ ist also gegeben durch eine Kategorie $\mathcal{C}$ mit einem beliebigen $\alpha_1 \in [\mathcal{C}, \mathcal{C}]$.

8.3 Monaden

Sei $\mathcal{A}$ eine Kategorie. Mit Monaden kann man “algebraische” Kategorien über $\mathcal{A}$ beschreiben. Letztere sind stets Teil einer Adjunktion

$$\mathcal{A} = (\text{Objekte ohne Zusatzstruktur}) \begin{array}{c} \xrightarrow{\text{“freie Algebren”}} \\ \perp \\ \xleftarrow{\text{Vergiss-Funktor}} \end{array} \text{“algebraische” Kategorie,} \quad (15)$$

welche zu folgender Struktur führt:

Definition 8.10. Eine Monade auf $\mathcal{A}$ ist ein Monoid (T, μ, η) in $[\mathcal{A}, \mathcal{A}]$. besteht also aus einem Funktor $\mathcal{A} \xrightarrow{T} \mathcal{A}$ und natürlichen Transformationen $T^2 \xrightarrow{\mu} T$ und $1_{\mathcal{A}} \xrightarrow{\eta} T$, so dass folgende Diagramme für jedes $X \in \mathcal{A}$ kommutieren:

$$\begin{array}{ccc} TTTX & \xrightarrow{T\mu_X} & TTX \\ \mu_{TX} \downarrow & & \downarrow \mu_X \\ TTX & \xrightarrow{\mu_X} & TX, \end{array} \quad \begin{array}{ccc} TX & \xrightarrow{\quad} & TX, \\ \eta_{TX} \searrow & & \nearrow \mu_X \\ & TTX & \end{array}, \quad \begin{array}{ccc} TX & \xrightarrow{\quad} & TX. \\ T\eta_X \searrow & & \nearrow \mu_X \\ & TTX & \end{array}$$

Proposition 8.11. Sei $\mathcal{A} \xrightleftharpoons[G]{F} \mathcal{B}$ eine Adjunktion mit Eins $1_{\mathcal{A}} \xrightarrow{\eta} GF$ und Koeins $FG \xrightarrow{\varepsilon} 1_{\mathcal{B}}$. Dann ist $T := GF \in [\mathcal{A}, \mathcal{A}]$ mit $GFGF \xrightarrow{\mu := G\varepsilon_F} GF$ und $1_{\mathcal{A}} \xrightarrow{\eta} GF$ eine Monade.

Beweis. Das Quadrat kommutiert, weil $\varepsilon: FG \rightarrow 1$ eine natürliche Transformation ist; die Dreiecke wegen der Dreiecks-Identitäten (Proposition 6.8). $\square$

Beispiel 8.12. i) Die Adjunktion $(\text{Set}) \xrightleftharpoons[|\cdot|]{\langle \cdot \rangle} (\text{Monoid})$ liefert eine Monade auf (Set) :

- $TX = |\langle X \rangle| = \{x_1 \dots x_n | x_1, \dots, x_n \in X, n \in \mathbb{N}\}$ Menge aller Wörter auf dem Alphabet X ;
- $T^2X \xrightarrow{\mu_X} TX$ ist das “Weglassen von Klammern”: $(x_{1,1} \dots x_{1,n_1})(x_{2,1} \dots x_{2,n_2}) \dots \mapsto x_{1,1} \dots x_{1,n_1}x_{2,1} \dots x_{2,n_2} \dots$;
- $X \xrightarrow{\eta_X} TX$ ist die natürliche Inklusion.

ii) Ist $\mathcal{A}$ monoidal, so liefert jedes Monoid (M, μ^M, ν^M) in $\mathcal{A}$ eine Monade:

$$TX := M \square X, \quad M \square M \square X \xrightarrow{\mu_X := \mu^M \square 1_X} M \square X, \quad X \xrightarrow{\eta_X := \eta^M \square 1_X} M \square X.$$

iii) Sei R ein Ring. Als Monoid in (Ab) liefert dieser eine Monade. Die Adjunktion

$$(\text{Ab}) \xrightleftharpoons[\text{Vergiss}]{R \otimes -} (R\text{-Mod}) \text{ liefert dieselbe Monade auf } (\text{Ab}).$$

Jede Monade $\mathcal{T} = (T, \mu, \eta)$ auf $\mathcal{A}$ liefert eine “algebraische” Kategorie in (15):

Definition 8.13. Eine $\mathcal{T}$ -Algebra ist ein $A \in \mathcal{A}$ mit $TA \xrightarrow{\theta} A$ so, dass:

$$\begin{array}{ccc} T^2A & \xrightarrow{T\theta} & TA \\ \mu_A \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow \theta \\ TA & \xrightarrow{\theta} & A, \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\eta_A} & TA \\ & \searrow \circlearrowleft & \downarrow \theta \\ & 1_A & A \end{array}$$

Alle $\mathcal{T}$ -Algebren bilden eine Kategorie $\mathcal{A}^{\mathcal{T}}$, wobei

$$\text{Hom} \left(\begin{array}{cc} TA & , \quad TB \\ \downarrow \theta_A & \downarrow \theta_B \\ A & B \end{array} \right) = \left\{ g \in \text{Hom}(A, B) : \begin{array}{ccc} TA & \xrightarrow{Tg} & TB \\ \theta_A \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow \theta_B \\ A & \xrightarrow{g} & B \end{array} \right\}.$$

Beispiel 8.14. i) Ist $\mathcal{A}$ monoidal, $\mathcal{M}$ ein Monoid in $\mathcal{A}$ und $\mathcal{T}$ die entsprechende Monade (Beispiel 8.12 ii)), so ist $\mathcal{A}^{\mathcal{T}}$ die Kategorie der $\mathcal{M}$ -Wirkungen.

ii) Eine Algebra für die Monade $\mathcal{T}$ aus Beispiel 8.12 i) ist eine Menge A mit einer Abbildung $|\langle A \rangle| \ni a_1 \dots a_n \mapsto \theta(a_1 \dots a_n) \in A$. Kommutativität des Quadrats bedeutet z.B. für alle $x, y, z \in A$:

$$\begin{array}{ccc} (xy)z & \xrightarrow{T\theta} & \theta(xy)z \\ \mu \downarrow & & \downarrow \theta \\ xyz & \xrightarrow{\theta} & \theta(xyz) = \theta(\theta(xy)z) = \theta(x\theta(yz)) \\ \mu \uparrow & & \uparrow \theta \\ x(yz) & \xrightarrow{T\theta} & x\theta(yz) \end{array}$$

$$\Rightarrow (\text{Set})^{\mathcal{T}} = (\text{Halbgruppen}).$$

iii) Jedes $A \in \mathcal{A}$ liefert eine “freie Algebra” TA mit $T^2A \xrightarrow{\mu_A} TA$, und jeder Morphismus $A \xrightarrow{g} B$ in $\mathcal{A}$ ergibt einen Morphismus $TA \xrightarrow{Tg} TB$ in $\mathcal{A}^{\mathcal{T}}$; s.u..

Wir erhalten nun aus $\mathcal{T}$ eine Adjunktion wie in (15):

Proposition 8.15. *Es gibt eine Adjunktion $\mathcal{A} \xrightleftharpoons[\mathcal{G}^T]{F^T} \mathcal{A}^T$, wobei*

- $\mathcal{F}^T$ der “freie-Algebra-Funktor” ist: $\begin{cases} A \mapsto TA \text{ mit } (T^2A \xrightarrow{\mu_A} TA), \\ g \mapsto Tg; \end{cases}$
- $G^T : \mathcal{A}^T \rightarrow \mathcal{A}$ der Vergiss-Funktor ist;
- die Eins $1_{\mathcal{A}} \xrightarrow{\eta^T} G^T F^T$ gegeben ist durch $A \xrightarrow{\eta_A} TA$;
- die Koeins $F^T G^T \xrightarrow{\epsilon^T} 1_{\mathcal{A}^T}$ gegeben ist durch $F^T G^T (A, \theta) = (TA, \mu_A) \xrightarrow{\theta} (A, \theta)$.

Die zugehörige Monade (Proposition 8.11) ist genau $\mathcal{T}$.

Beweis. Übungsaufgabe. □

Proposition 8.16. *Ist $\mathcal{A} \xrightleftharpoons[\mathcal{G}]{F} \mathcal{B}$ eine Adjunktion und $\mathcal{T}$ die zugehörige Monade, so gibt es genau einen Funktor $\mathcal{B} \xrightarrow{K} \mathcal{A}^T$ mit $G^T K = G$ und $KF = F^T$.*

Beweis. Übungsaufgabe. □

Definition 8.17. *Eine Adjunktion heißt monadisch, falls der entsprechende Funktor K ein Isomorphismus ist.*

Die meisten unserer Beispiele von Adjunktionen sind monadisch.

Beispiel 8.18. i) *Kompakte Räume* bilden eine “algebraische” Kategorie über (Set)

(s. [ML98, §VI.9])! Die zu (Set) $\xrightleftharpoons[\text{Vergiss}]{\text{Stone-Cech}}$ (CmptHausd) gehörige Monade ist

gegeben durch (ÜA):

- $X \mapsto TX := \{\text{alle Ultrafilter auf } X\}$;
- $X \xrightarrow{\eta_X} TX, x \mapsto \{Y \subseteq X : x \in Y\}$;
- $TTX \xrightarrow{\mu} TX, \mathcal{F} \mapsto \{Y \subseteq X : \{F \in TX : Y \in F\} \in \mathcal{F}\}$.

ii) (Set) $\xrightleftharpoons[\text{Vergiss}]{\text{diskret}}$ (Top) ist nicht monadisch — die zugehörige Monade ist die Iden-

tität und deren Algebren sind einfache Mengen (nicht topologische Räume).

Monadische Adjunktionen werden durch Becks “Monadizitäts-Theorem” [ML98, §VI.7] charakterisiert.

8.4 Das universelle Monoid in der Kategorie Δ

Die Kategorie Δ ist definiert durch

$$\text{Ob}(\Delta) = \mathbb{N}, \quad \text{Hom}(m, n) = \{\text{monotone Abbildungen } \{1, \dots, m\} \rightarrow \{1, \dots, n\}\},$$

mit gewöhnlicher Verknüpfung von Abbildungen. Sie trägt eine strikt monoidale Struktur mit

$$m \square n := m + n, \quad I := 0, \quad (m \xrightarrow{f} n) \square (m' \xrightarrow{g} n') : x \mapsto \begin{cases} f(x), & x \leq m, \\ g(x - m), & x > m. \end{cases}$$

Das Objekt $1 \in \Delta$ ist ein Monoid bezüglich der eindeutigen Abbildungen $1 \square 1 = 2 \rightarrow 1$ und $0 \rightarrow 1$.

Proposition 8.19. *i) Für jedes Monoid (M, μ, ϵ) in einer strikt monoidalen Kategorie $\mathcal{C}$ gibt es genau einen strikt monoidalen Funktor $\Delta \xrightarrow{F} \mathcal{C}$ mit $F1 = M$, $F(2 \rightarrow 1) = \mu$, $F(0 \rightarrow 1) = \epsilon$.*

ii) Bezeichnet $(\square\text{-Cat})$ die Kategorie der strikt monoidalen kleinen Kategorien, so gibt es natürliche Isomorphismen von Kategorien

$$\text{Hom}_{(\square\text{-Cat})}(\Delta, \mathcal{C}) \cong (\text{Mon}_{\mathcal{C}}) \quad \text{für } \mathcal{C} \in (\square\text{-Cat}).$$

Beweis. Siehe [ML98, §VII.5]. Grundidee:

- Für jedes $n \in \Delta$ muss $F n = F(1 + \dots + 1) = F1 \square \dots \square F1 = X \square \dots \square X$ gelten.
- Die Axiome eines Monoids liefern für jedes $n \in \mathbb{N}$ genau einen Morphismus $\underbrace{X \square \dots \square X}_{n \text{ mal } X} \xrightarrow{\mu^{(n)}} X$, wobei $\mu^{(0)} = \eta$, $\mu^{(1)} = 1_X$, $\mu^{(2)} = \mu$, ...

Jeder Morphismus $m \xrightarrow{f} n$ in Δ ist ein Produkt

$$\begin{array}{c} m \\ \downarrow f \\ n \end{array} = \begin{array}{c} f^{-1}(1) \\ \downarrow \\ 1 \end{array} \quad \square \quad \dots \quad \square \quad \begin{array}{c} f^{-1}(n) \\ \downarrow \\ 1 \end{array}$$

und somit muss $F f = \mu^{(|f^{-1}(1)|)} \square \dots \square \mu^{(|f^{-1}(n)|)}$ gelten.

- Zu prüfen: $F(f)F(g) = F(fg)$ für alle Morphismen f, g in Δ . □

8.5 Simpliciale Homologietheorien

Plan Konstruiere berechenbare “Invarianten” für Objekte einer Kategorie $\mathcal{A}$ (beispielsweise (Top), (Group), (R -Mod), ...) in Form eines Funktors

$$\mathcal{A} \xrightarrow{F} [\Delta_+^{\text{op}}, (\text{Ab})] \xrightarrow{C^-} (\text{Kettenkomplexe}) \xrightarrow{H} (\mathbb{N}\text{-grad. ab. Gruppen}),$$

wobei $\Delta_+ \subset \Delta$ folgende Unterkategorie ist:

$$\text{Ob}(\Delta_+) = \text{Ob}(\Delta) \setminus \{0\}, \quad \text{Hom}_{\Delta_+}(m, n) = \begin{cases} \text{Hom}_{\Delta}(m, n), & m \leq n, \\ \emptyset, & m > n. \end{cases}$$

Definition von H

- Ein *Kettenkomplex* ist eine Folge von abelschen Gruppen und Homomorphismen

$$(C, \partial): \cdots \rightarrow C_{n+1} \xrightarrow{\partial_n} C_n \rightarrow \cdots \xrightarrow{\partial_0} C_0 \quad \text{mit} \quad \partial_n \partial_{n+1} = 0 \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Seine *Homologie* ist

$$H(C, \partial) = \bigoplus_n H_n(C, \partial) \quad \text{mit} \quad H_n(C, \partial) = \ker \partial_{n-1} / \text{img } \partial_n \text{ für alle } n \in \mathbb{N},$$

wobei $\text{img } \partial_{n+1} \subseteq \ker \partial_n$ wegen $\partial_n \partial_{n+1} = 0$.

- Ein Morphismus $(C, \partial) \xrightarrow{\alpha} (C', \partial')$ ist ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & C_n & \xrightarrow{\partial_{n-1}} & C_{n-1} & \longrightarrow & \cdots \\ & & \downarrow \alpha_n & \circlearrowleft & \downarrow \alpha_{n-1} & & \\ \cdots & \longrightarrow & C'_n & \xrightarrow{\partial'_{n-1}} & C'_{n-1} & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

Dieses liefert für jedes $n \in \mathbb{N}$ einen Homomorphismus

$$H_n \alpha: H_n(C, \partial) \rightarrow H_n(C', \partial'), \quad x + \text{img } \partial_n \mapsto \alpha_n(x) + \text{img } \partial'_n,$$

denn $\alpha_n(\ker \partial_{n-1}) \subseteq \ker \partial'_n$ und $\alpha_n(\text{img } \partial_n) \subseteq \text{img } \partial'_n$.

Definition von $C-$

- Für jedes $n \in \mathbb{N}$ und $i = 1, \dots, n+1$ gibt es genau eine *Randabbildung*

$$\delta_i^n \in \text{Hom}_{\Delta_+}(n, n+1), \text{ definiert durch } \text{img } \delta_i^n = \{1, \dots, n+1\} \setminus \{i\}.$$

Sie erfüllen

$$\delta_i^{n+1} \delta_j^n = \begin{cases} \delta_{j+1}^{n+1} \delta_i^n, & i \leq j, \\ \delta_j^{n+1} \delta_i^n, & i > j \end{cases} \quad \text{für alle } n, i, j \quad (16)$$

und erzeugen Δ_+ : jeder Morphismus ist eine Verknüpfung der $(\delta_i^n)_{n,i}$ oder eine Identität.

- Jeder Funktor $Y \in [\Delta_+^{\text{op}}, (\text{Ab})]$ liefert einen Kettenkomplex

$$\begin{aligned} \partial_n &:= \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^i Y(\delta_i^{n+1}) \\ \cdots \rightarrow (CY)_{n+1} := Y(n+2) &\longrightarrow (CY)_n := Y(n+1) \rightarrow \cdots; \end{aligned}$$

die Relation $\partial_n \partial_{n+1} = 0$ folgt aus den Relationen (16).

- Jede natürliche Transformation $Y \xrightarrow{\alpha} Y'$ in $[\Delta_+^{\text{op}}, (\text{Ab})]$ liefert offenbar einen Morphismus $CY \xrightarrow{C\alpha} CY'$.

Beispiele für F

- *Simpliziale Homologie simplizialer Komplexe* ist der Funktor

$$\mathcal{A} := [\Delta_+^{\text{op}}, (\text{Set})] \xrightarrow{\mathbb{Z}-} [\Delta_+^{\text{op}}, (\text{Ab})] \xrightarrow{HC(-)} (\mathbb{N}\text{-grad. ab. Gruppen}),$$

wobei $(\text{Set}) \xrightarrow{\mathbb{Z}-} (\text{Ab})$ der “freie abelsche Gruppe”-Funktor ist.

Vorstellung: Jedes $X \in [\Delta_+^{\text{op}}, (\text{Set})]$ besteht aus

- Mengen $X(1), X(2), X(3) \dots$ von Ecken, Kanten, Dreiecken, ...
- Randabbildungen $\cdots \quad X(3) \rightrightarrows X(2) \rightrightarrows X(1)$

und beschreibt einen triangulierten topologischen Raum — das Bild von X unter dem Funktor $[\Delta_+^{\text{op}}, (\text{Set})] \xrightarrow{|\cdot|} (\text{Top})$ (*geometrische Realisierung*).

Die *simpliziale Homologie* $H_*(X) = H_*(C\mathbb{Z}X)$ zählt die “Löcher” von $|X|$.

- *Singuläre Homologie topologischer Räume* ist der Funktor

$$\mathcal{A} := (\text{Top}) \xrightarrow{S-} [\Delta_+^{\text{op}}, (\text{Set})] \xrightarrow{\text{simpl. Homologie}} (\mathbb{N}\text{-grad. ab. Gruppen}).$$

wobei $S-$ wie folgt definiert ist. Die Standardsimplexe liefern $\underline{\Delta}: \Delta \rightarrow (\text{Top})$:

- $\underline{\Delta}(n) =$ konvexe Hülle der Einheitsvektoren $e_1^n, \dots, e_n^n \in \mathbb{R}^n$ (leer für $n = 0$);

- $\underline{\Delta}(m \xrightarrow{f} n)$ ist affin linear mit $e_i^m \mapsto e_{f(i)}^n$ für $i = 1, \dots, m$.

Wir erhalten für jeden topologischen Raum X

- eine Approximation von X durch den simpl. Komplex $SX := \text{Hom}(\underline{\Delta} -, X)$:

$$SX_n = \text{Menge der } (n-1)\text{-Ecke in } SX = \text{Hom}(\underline{\Delta}(n), X),$$

- den Komplex $C\mathbb{Z}SX$ der *singulären Ketten*,
- die singuläre Homologie $H_*(X) := H_*C\mathbb{Z}SX$ von X .

- *Homologie kleiner Kategorien* ist der Funktor

$$\mathcal{A} := (\text{Cat}) \xrightarrow[\text{Nerv}]{N} [\Delta_+^{\text{op}}, (\text{Set})] \xrightarrow{\text{simpl. Homologie}} (\mathbb{N}\text{-grad. ab. Gruppen}),$$

wobei N wie folgt definiert ist. Die geordneten Mengen $\underline{n} = \{1, \dots, n\}$ ($n \in \mathbb{N}$), aufgefasst als Kategorien, liefern einen Funktor $\mathfrak{t}: \Delta \rightarrow (\text{Cat})$, $n \mapsto \underline{n}$.

Der *Nerv* einer Kategorie $\mathcal{C}$ ist dann der simpliziale Komplex $N_{\mathcal{C}} := \text{Hom}_{(\text{Cat})}(\mathfrak{t} -, \mathcal{C})$:

$$N_{\mathcal{C}}(n) = \{\text{Diagramme } X_1 \xrightarrow{f_1} X_2 \xrightarrow{f_2} \dots \xrightarrow{f_n} X_n \text{ in } \mathcal{C}\},$$

$$N_{\mathcal{C}}(\delta_i^{n-1}) = \text{Entferne in einem Diagramm wie oben } X_i.$$

Mit der Einbettung $(\text{Group}) \rightarrow (\text{Cat})$ erhalten wir dann für jede Gruppe G :

- der Nerv $N_G(n) = G^n$ ist der klassifizierende Raum für BG
- die Homologie von G als Homologie des Kettenkomplexes

$$\begin{aligned} \dots \rightarrow \mathbb{Z}G^{n+2} &\xrightarrow{\partial_n} \mathbb{Z}G^{n+1} \rightarrow \dots \\ (x_1, \dots, x_{n+2}) &\mapsto (x_2, \dots, x_{n+2}) \\ &\quad + \left(\sum_{i=1}^{n+1} (-1)^n (x_1, \dots, x_{i-1}, x_i x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_{n+2}) \right) \\ &\quad + (-1)^{n+2} (x_1, \dots, x_{n+1}). \end{aligned}$$

- *Homologie via Komonaden* Sei $\mathcal{A}$ eine Kategorie mit einer Komonade $\mathcal{T} = (\mathcal{A} \xrightarrow{T} \mathcal{A}, T \xrightarrow{\delta} T^2, T \xrightarrow{\varepsilon} 1_{\mathcal{A}})$ und einem Funktor $\mathcal{A} \xrightarrow{U} (\text{Ab})$. Wir erhalten eine $\mathcal{T}$ -Homologie

$$\mathcal{A} \xrightarrow{\mathcal{U}\mathcal{T}-} [\Delta_+^{\text{op}}, (\text{Ab})] \xrightarrow{HC-} (\mathbb{N}\text{-grad. ab. Gruppen})$$

wie folgt. Die universelle Eigenschaft von Δ (Proposition 8.19) liefert einen Funktor $\Delta_+^{\text{op}} \rightarrow [\mathcal{A}, \mathcal{A}]$ und damit

$$\mathcal{A} \ni A \mapsto UT_A: \Delta_+^{\text{op}} \rightarrow (\text{Ab}), \quad \begin{cases} n \mapsto UT^n A, \\ \delta_i^n \mapsto UT^{i-1} \varepsilon_{T^{n-i} A}. \end{cases}$$

Zum Beispiel liefert für jeden kommutativen Ring R die bekannte Adjunktion $(\text{Ab}) \xrightleftharpoons[\perp]{} (R\text{-Mod})$ eine Komonade $\mathcal{T}$ auf $(R\text{-Mod})$,

$$T: (R\text{-Mod}) \rightarrow (R\text{-Mod}), \quad M \mapsto R \otimes_{\mathbb{Z}} M, \quad \varepsilon_M: R \otimes_{\mathbb{Z}} M \rightarrow M, \quad r \otimes m \mapsto rm.$$

Jeder R -Modul N liefert dann einen Funktor $N \otimes_R -: (R\text{-Mod}) \rightarrow (\text{Ab})$ und somit einen Homologie-Funktor $\text{Tor}^R(N, -): (R\text{-Mod}) \rightarrow (\mathbb{N}\text{-grad. ab. Gruppen})$, der einem R -Modul M die Homologie des Komplexes

$$\begin{aligned} \cdots \rightarrow N \otimes R^{\otimes n} \otimes M \xrightarrow{\partial_n} N \otimes R^{\otimes n-1} \otimes M \rightarrow \cdots \\ x \otimes r_1 \otimes \cdots \otimes r_n \otimes y \mapsto xr_1 \otimes r_2 \otimes \cdots \otimes r_n \otimes y \\ + \sum_{i=2}^{n-1} (-1)^{i-1} xr_1 \otimes r_1 \otimes \cdots \otimes r_i r_{i+1} \otimes \cdots \otimes r_n \otimes y \\ + (-1)^{n-1} x \otimes r_1 \otimes \cdots \otimes r_{n-1} \otimes r_n y. \end{aligned}$$

Literatur

- [Bar02] Michael Barr. *Acyclic models*, volume 17 of *CRM Monograph Series*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2002.
- [Bor94] Francis Borceux. *Handbook of categorical algebra. 1*, volume 50 of *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*. Cambridge University Press, Cambridge, 1994. Basic category theory.
- [KS06] Masaki Kashiwara and Pierre Schapira. *Categories and sheaves*, volume 332 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, Berlin, 2006.
- [ML98] Saunders Mac Lane. *Categories for the working mathematician*, volume 5 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, second edition, 1998.